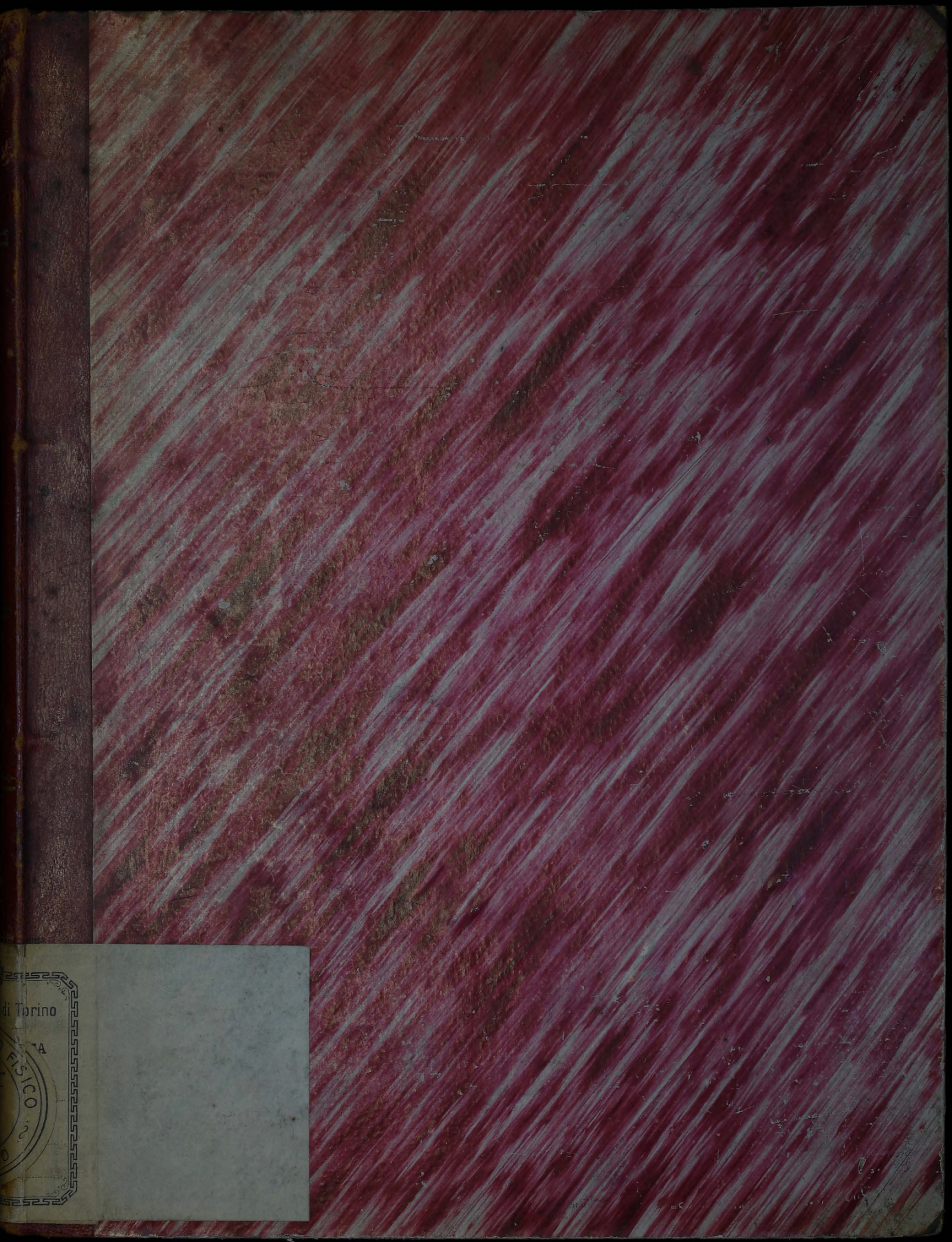

di Torino
FISICO

RICORDO del Professore Commendatore **Giuseppe Domenico Botto** al Gabinetto di Fisica dell' Università di Torino dato dal Nipote ed Erede GIAMBATTISTA BOTTO di Parma.

S
2ª S

St. II. n. 96

ÉTUDES

SUR

LA THÉORIE DES VIBRATIONS

R. Università di Torino
ISTITUTO DI FISICA

PAR

LOUIS FRÉDÉRIC MÉNABRÉA

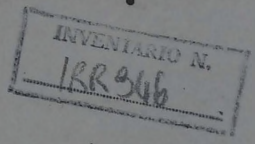
COLONEL DU GÉNIE MILITAIRE

TURIN

DE L'IMPRIMERIE ROYALE

1854.

BOTTO PIER MENALF
inv. IRR346



EXTRAIT DES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TURIN

Série II. Tome XV.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me propose de montrer comment on peut appliquer les principes généraux de la Théorie des petites oscillations des corps, d'une manière plus simple et plus uniforme qu'ils ne le sont généralement. Cette théorie, qui forme une des branches les plus importantes de la mécanique, a été constamment l'objet d'études suivies de la part des Géomètres des divers pays; mais c'est à l'Italie que revient la principale gloire de l'avoir vue se développer et s'établir dans toute sa généralité. LAGRANGE, dans ses admirables *Recherches sur la nature et la propagation du son* insérées dans le Tome 1.er de la *Miscellanea Societatis Taurinensis*, exposait et coordonnait les véritables principes de la solution du problème des petites oscillations, et, successivement, dans sa *Mécanique analytique*, il l'embrassait dans toute sa généralité. Cependant les difficultés analytiques que présentait la question, ne semblaient pas encore applanies; un vaste champ restait ouvert aux recherches des Savants lorsque FOURIER, dans sa *Théorie de la Chaleur*, développa une nouvelle méthode d'analyse qui trouvait également une importante application dans le problème des petites oscillations.

Il fut suivi dans cette voie par NAVIER, POISSON et beaucoup d'autres Géomètres qui présentement illustrent la science (*).

Cependant, à travers les artifices ingénieux de cette méthode, il est parfois difficile de saisir la signification des diverses opérations qui en dérivent; quelquefois même elle éloigne de la marche directe et apporte à la solution du problème, des difficultés étrangères à la question. C'est ainsi que, en général, pour déterminer les coefficients des termes circulaires dont se composent les expressions du mouvement vibratoire, on a recours aux équations aux limites, tandisque la détermination de ces coefficients ne dépend que des coordonnées et des vîtesses initiales des divers points du système. C'est pourquoi j'ai cru faire une chose utile que de remonter à l'origine de ces méthodes pour en écarter tout ce qui était inutile au but qu'on se propose; c'est ainsi que des problèmes qui autrement seraient très-compliqués, deviennent au contraire d'une solution facile. De cette manière on est naturellement ramené à la méthode de LAGRANGE delaquelle on déduit directement les formules de FOURIER. Mais, il faut l'avouer, LAGRANGE n'avait pas donné assez de développement à son système; certaines questions fondamentales devaient y être présentées sous un point de vue un peu différent, et avaient besoin d'être établies d'une manière plus rigoureuse. Toutefois, l'on verra combien cette méthode est simple et féconde lorsqu'on l'emploit d'une manière convenable.

Voici, maintenant, l'indication sommaire des principales questions traitées dans ce Mémoire.

Dans le premier §, après avoir rappelé les conditions générales auxquelles doit satisfaire un système en équilibre, afin que cet équilibre soit *stable*, je suppose que les points de ce système soient abandonnés à l'action des forces qui les sollicitent, après avoir été fort peu écarté de leurs positions d'équilibre stable autour desquelles ils exécuteront une suite d'oscillations dont il s'agit de déterminer les lois. L'on admet que les seules forces qui agissent sur le système, sont des forces d'attraction ou de répulsion des divers points entr'eux ou dirigés vers des centres fixes. On suppose également que les écartements des divers points, de leur

(*) Voir, dans le cahier 17.ème du Journal de l'École Polytechnique, un Mémoire sur les oscillations des lames élastiques, publié par M. PLANA à qui presque toutes les branches des Mathématiques sont redevables de quelques importants progrès.

position d'équilibre sont assez petits pour que les forces accélératrices soient respectivement proportionnelles à ces écartements. De là on déduit, comme conséquence fondamentale, que les coefficients des termes réciproques, dans les équations du mouvement, sont respectivement égaux deux à deux. Cela posé, je démontre, en premier lieu, qu'il y a toujours un certain nombre de combinaisons linéaires des variables indépendantes dont les variations sont représentées par le mouvement d'un pendule simple. Le nombre de ces combinaisons est égal à celui des variables indépendantes. De là on obtient, par la simple élimination, les expressions des diverses variables, expressions dont chacune se compose d'un même nombre de termes circulaires qui ne diffèrent entr'eux que par les coefficients dont ils sont affectés. La détermination des constantes arbitraires introduites par l'intégration des équations du mouvement, les rapports qui existent entr'elles se déduisent immédiatement de l'analyse suivie et coïncident avec les résultats obtenus par LAGRANGE. Le problème se trouve ainsi résolu dans toute sa généralité ; il ne reste qu'à en faire l'application aux différents cas qui peuvent se présenter; c'est ce qui forme l'objet des §§ suivants. J'y examine successivement les oscillations d'un point matériel sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes; les oscillations longitudinales et transversales des systèmes linéaires, flexibles ou élastiques composées de diverses parties hétérogènes et chargées de masses reparties d'une manière quelconque ; les vibrations normales d'une membrane flexible également tendue dans tous les sens et composée de deux parties de natures différentes ; enfin, les vibrations concentriques d'une sphère élastique. Ces diverses applications m'ont paru suffisantes pour montrer l'usage que l'on peut faire du procédé général indiqué dans le premier paragraphe.

Afin de mettre plus de variété dans l'analyse, j'établis les équations du mouvement d'après des considérations propres à chaque problème en particulier. On pourrait également les déduire de considérations générales sur la nature des corps élastiques ; mais, pour suivre cette marche, j'aurais dû m'écarter du but que je me suis proposé (*).

Dans l'étude des mouvements linéaires, j'ai trouvé beaucoup plus simple de passer de la considération des systèmes composés d'un nombre fini

(*) Les études des Géomètres sur l'élasticité des corps, se trouvent résumées dans le remarquable ouvrage de M. LAMÉ, intitulé : *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps.*

de points matériels, à celle des systèmes continus; de cette manière on voit plus clairement comment s'opère la transformation des équations dans le passage du fini à l'infini. Ainsi, dans le cas de la verge élastique, je considère d'abord une suite de points matériels réunis deux à deux par des éléments poligonaux dont chacun oppose au mouvement une résistance proportionnelle à la variation de l'angle qu'il fait avec l'élément contigu. De là on passe facilement au cas d'une verge élastique continue homogène, ou bien composée de diverses parties hétérogènes.

Tel est le résumé du travail que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie; j'espère qu'elle l'accueillera avec bienveillance, et j'aurai atteint mon but si je puis contribuer à rendre plus simple et, par conséquent, plus accessible une théorie delaquelle semblent dépendre les progrès ultérieurs de plusieurs branches importantes de la physique mathématique.

§ I.

Principes généraux.

1. Nous considérons un système de points matériels soumis à leurs actions réciproques ou attirés par des centres fixes, et primitivement placés dans une position d'*équilibre stable*. Si on les écarte très-peu de leurs positions respectives en leur imprimant de très-petites vîtesses, ils tendront naturellement à y revenir, et exécuteront autour d'elles une suite d'oscillations dont il s'agit de déterminer les lois.

Nous nous bornerons à rappeler les conditions auxquelles doit satisfaire un système de forces en équilibre afin que cet équilibre soit stable. Pour cela, soient X_0, Y_0, Z_0 les composantes orthogonales des forces qui agissent sur chaque point du système; x_0, y_0, z_0 les coordonnées respectives d'un de ces points considéré dans sa position d'équilibre; si l'on fait

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \Sigma\int(X_0\,dx_0+Y_0\,dy_0+Z_0\,dz_0)=T_0\,,$$

la somme Σ s'étendant à tous les points du système, l'équilibre est *stable* lorsque T_0 est un *maximum;* si au contraire T_0 est un *minimum*, l'équilibre est *instable*.

On démontre également que, lorsque les forces du système consistent en forces d'attraction ou de répulsion réciproques, ou qu'elles sont dirigées vers des centres fixes, la différentielle

$$\Sigma(X dx + Y dy + Z dz)$$

est exacte. Dans cette expression X, Y, Z; X', Y', Z'; etc.; x, y, z; x', y', z'; etc.; représentent les composantes des forces appliquées aux divers points, et les coordonnées de ceux-ci à un instant quelconque du mouvement.

Cela posé, soit i le nombre des points matériels qui composent le système; celui des coordonnées sera égal à $3.i$; mais si l'on suppose qu'il y ait ν équations de conditions, le nombre des variables indépendantes sera réduit à $3.i - \nu$. L'on pourra exprimer chacune des coordonnées x, y, z, etc., au moyen $3.i - \nu$ d'entr'elles prises comme variables indépendantes, ou bien au moyen $3.i - \nu$ nouvelles variables a, b, c, $\mathfrak{d}$, etc., que l'on considérera comme indépendantes. Ainsi l'on aura

$$(2) \quad \ldots \quad \Sigma\int(X dx + Y dy + Z dz) = \varphi(a, b, c, \mathfrak{d}, \text{etc.}),$$

φ exprimant une fonction.

Soient: a_0, b_0, c_0, $\mathfrak{d}_0$, etc. les valeurs de a, b, c, $\mathfrak{d}$, correspondantes à la position d'équilibre, on aura:

$$(3) \quad \ldots \quad \Sigma\int(X_0 dx_0 + Y_0 dy_0 + Z_0 dz_0) = \varphi(a_0, b_0, c_0, \mathfrak{d}_0, \text{etc.}).$$

Or, comme les forces X_0, Y_0, Z_0, etc. se font équilibre, on aura, en vertu du principe des vîtesses virtuelles,

$$(4) \quad \ldots \quad \Sigma(X_0 \delta x_0 + Y_0 \delta y_0 + Z_0 \delta z_0) = 0,$$

où δx_0, δy_0, δz_0 expriment les variations de coordonnées compatibles avec les conditions du système.

De l'équation (3) on déduit

$$(5) \quad \ldots \quad \Sigma(X_0 \delta x_0 + Y_0 \delta y_0 + Z_0 \delta z_0) = \delta\int(X_0 dx_0 + Y_0 dy_0 + Z_0 dz_0)$$

$$= \delta.\varphi(a_0, b_0, c_0, \mathfrak{d}_0, \text{etc.}) = 0,$$

et par suite

$$(6) \ldots\ldots \quad \delta.\varphi(a_0, b_0, c_0, \mathfrak{d}_0, \text{etc.}) = \frac{d\varphi_0}{da_0}\delta a_0 + \frac{d\varphi_0}{db_0}\delta b_0 + \frac{d\varphi_0}{dc_0}\delta c_0 + \frac{d\varphi_0}{d\mathfrak{d}_0}\delta \mathfrak{d}_0 + \text{etc.} = 0 \ ,$$

où, par abréviation, l'on écrit, dans le second membre, φ_0 pour

$$\varphi(a_0, b_0, c_0, \mathfrak{d}_0, \text{etc.}) \ .$$

On voit, par ces équations, que $\varphi(a_0, b_0, c_0, \text{etc.})$ est un *maximum* ou un *minimum*.

Si l'on considère le système pendant le mouvement, le même principe des vîtesses virtuelles combiné avec celui de D'Alembert donnera encore :

$$(7) \ldots\ldots \quad \Sigma\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] = 0,$$

ou bien

$$(8) \ldots\ldots \quad \Sigma m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right\} = \Sigma\{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\} = \delta.\varphi(a, b, c, \mathfrak{d}, \text{etc.}) \ ;$$

m exprime la masse d'un des points matériels, et t le temps.

2. Maintenant faisons

$$a = a_0 + \alpha \ ; \qquad b = b_0 + \beta \ ; \qquad c = c_0 + \gamma \ ; \qquad \text{etc. etc.} \ ;$$

où α, β, γ, etc. expriment des quantités variables que nous supposerons toujours très-petites pendant toute la durée du mouvement; les valeurs de x, y, z, etc., après le temps t, seront exprimées de la manière suivante :

$$(9) \ldots\ldots \quad \begin{cases} x = x_0 + \mathcal{E}_1\alpha + \mathcal{E}_2\beta + \mathcal{E}_3\gamma + \text{etc.} \ ; \\ y = y_0 + \mathcal{F}_1\alpha + \mathcal{F}_2\beta + \mathcal{F}_3\gamma + \text{etc.} \ ; \\ z = z_0 + \mathcal{G}_1\alpha + \mathcal{G}_2\beta + \mathcal{G}_3\gamma + \text{etc.} \ ; \\ x' = x'_0 + \mathcal{E}_1'\alpha + \mathcal{E}_2'\beta + \mathcal{E}_3'\gamma + \text{etc.} \ ; \\ y' = y'_0 + \mathcal{F}_1'\alpha + \mathcal{F}_2'\beta + \mathcal{F}_3'\gamma + \text{etc.} \ ; \\ z' = z'_0 + \mathcal{G}_1'\alpha + \mathcal{G}_2'\beta + \mathcal{G}_3'\gamma + \text{etc.} \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

équations dans lesquelles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \ldots\ldots; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \ldots\ldots; \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \ldots\ldots; \mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2' \ldots\ldots$; etc. représentent des coefficiens constants.

On aura également :

$$(10)\ldots\left\{\begin{array}{l} \varphi(a, b, c, \text{etc.}) \\ =\varphi(a_0+\alpha, b_0+\beta, c_0+\gamma, \ldots\ldots)=\varphi(a_0, b_0, c_0, \text{etc.}) \\ +\frac{d\varphi_0}{da}\alpha+\frac{d\varphi_0}{db}\beta+\frac{d\varphi_0}{dc}\gamma+\text{etc.} \\ +\frac{1}{1.2}\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2\varphi_0}{da^2}\alpha^2+\frac{d^2\varphi_0}{db^2}\beta^2+\frac{d^2\varphi_0}{dc^2}\gamma^2 \\ +2\frac{d^2\varphi_0}{da.db}\alpha\beta+2\frac{d^2\varphi_0}{da.dc}\alpha\gamma+2\frac{d^2\varphi_0}{db.dc}\beta\gamma+\text{etc.} \end{array}\right. \\ +R\ ; \end{array}\right.$$

où R représente la somme des termes dans lesquels α, β, γ, etc. se trouvent au-dessus de la deuxième dimension.

Or, en vertu des équations (5) et (6), on aura aussi

$$(11)\ldots\ldots \quad \frac{d\varphi_0}{da}\delta\alpha+\frac{d\varphi_0}{db}\delta\beta+\frac{d\varphi_0}{dc}\delta\gamma+\text{etc.}=0\ ;$$

par conséquent :

$$(12)\ldots\ldots \quad \delta.\varphi(a, b, c, \text{etc.})$$
$$=\frac{d^2\varphi_0}{da^2}\alpha\delta\alpha+\frac{d^2\varphi_0}{db^2}\beta\delta\beta+\frac{d^2\varphi_0}{dc^2}\gamma\delta\gamma$$
$$+\frac{d^2\varphi_0}{da.db}\{\alpha\delta\beta+\beta\delta\alpha\}+\frac{d^2\varphi_0}{da.dc}\{\alpha\delta\gamma+\gamma\delta\alpha\}+\frac{d^2\varphi_0}{db.dc}\{\beta\delta\gamma+\gamma\delta\beta\}$$
$$+\text{etc.}+\delta.R\ .$$

Comme nous supposons que α, β, γ restent très-petits pendant toute la durée du mouvement, nous négligerons les termes dans lesquels ces quantités se trouvent au-dessus de la première puissance ; ainsi l'on ne tiendra pas compte de δR dans l'équation précédente, ce qui revient à admettre que les forces qui agissent sur les différents points du système,

sont proportionnelles aux écartements de ces points de leurs positions d'équilibre.

En vertu des équations (9) on aura également :

$$(13)\ldots\ldots \quad \frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$

$$= \delta\alpha\left\{(\mathcal{E}_1^2+\mathcal{F}_1^2+\mathcal{G}_1^2+\text{etc.})\frac{d^2\alpha}{dt^2}+(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2+\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2+\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2\ldots..)\frac{d^2\beta}{dt^2}\right.$$
$$\left.+(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3+\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3+\mathcal{G}_1\mathcal{G}_3\ldots..)\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\delta\beta\left\{(\mathcal{E}_2^2+\mathcal{F}_2^2+\mathcal{G}_2^2\ldots..)\frac{d^2\beta}{dt^2}+(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1+\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1+\mathcal{G}_2\mathcal{G}_1\ldots..)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right.$$
$$\left.+(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3+\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3+\mathcal{G}_2\mathcal{G}_3\ldots..)\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\delta\gamma\left\{(\mathcal{E}_3^2+\mathcal{F}_3^2+\mathcal{G}_3^2\ldots..)\frac{d^2\gamma}{dt^2}+(\mathcal{E}_3\mathcal{E}_1+\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1+\mathcal{G}_3\mathcal{G}_1\ldots..)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right.$$
$$\left.+(\mathcal{E}_3\mathcal{E}_2+\mathcal{F}_3\mathcal{F}_2+\mathcal{G}_3\mathcal{G}_2\ldots..)\frac{d^2\beta}{dt^2}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\text{etc.}$$

Pour abréger l'écriture nous ferons :

$$(14)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\mathcal{E}_1^2+\mathcal{F}_1^2+\mathcal{G}_1^2+\text{etc.}=\mathcal{A}_1\ ;\\ \mathcal{E}_2^2+\mathcal{F}_2^2+\mathcal{G}_2^2+\text{etc.}=\mathcal{A}_2\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \text{etc.}\ ;\\ \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2+\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2+\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2+\text{etc.}=\mathcal{B}_{(1,2)}\ ;\\ \mathcal{E}_1\mathcal{E}_3+\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3+\mathcal{G}_1\mathcal{G}_3+\text{etc.}=\mathcal{B}_{(1,3)}\ ;\\ \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3+\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3+\mathcal{G}_2\mathcal{G}_3+\text{etc.}=\mathcal{B}_{(2,3)}\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

Ainsi l'équation (8) deviendra :

$$(15)\ldots\left\{\begin{array}{l}\Sigma m.\left\{\begin{array}{l}\left(\mathfrak{A}_1\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}+\mathfrak{B}_{(1,2)}\dfrac{d^2\beta}{dt^2}+\mathfrak{B}_{(1,3)}\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}+\text{etc.}\right)\delta\alpha\\ +\left(\mathfrak{A}_2\dfrac{d^2\beta}{dt^2}+\mathfrak{B}_{(1,2)}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}+\mathfrak{B}_{(2,3)}\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}+\text{etc.}\right)\delta\beta\\ +\left(\mathfrak{A}_3\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}+\mathfrak{B}_{(1,3)}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}+\mathfrak{B}_{(2,3)}\dfrac{d^2\beta}{dt^2}+\text{etc.}\right)\delta\gamma\\ +\text{etc. etc. .....}\end{array}\right.\\ =\left(\dfrac{d^2\varphi_0}{da^2}\alpha+\dfrac{d^2\varphi_0}{dadb}\beta+\dfrac{d^2\varphi_0}{dadc}\gamma+\text{etc.}\right)\delta\alpha\\ +\left(\dfrac{d^2\varphi_0}{db^2}\beta+\dfrac{d^2\varphi_0}{dbda}\alpha+\dfrac{d^2\varphi_0}{dbdc}\gamma+\text{etc.}\right)\delta\beta\\ +\left(\dfrac{d^2\varphi_0}{dc^2}\gamma+\dfrac{d^2\varphi_0}{dcda}\alpha+\dfrac{d^2\varphi_0}{dcdb}\beta+\text{etc.}\right)\delta\gamma\\ +\text{etc.}\end{array}\right.$$

Comme α, β, γ, etc. sont des variables indépendantes, les équations du mouvement du système s'obtiendront en égalant respectivement, dans l'équation précédente, les coefficients des variations $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, etc. etc. .....; ainsi l'on aura

$$(16)\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{A}_1+\dfrac{d^2\beta}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{B}_{(1,2)}+\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{B}_{(1,3)}+\text{etc.}\\ =\dfrac{d^2\varphi_0}{da^2}\alpha+\dfrac{d^2\varphi_0}{dadb}\beta+\dfrac{d^2\varphi_0}{dadc}\gamma+\text{etc.};\\ \dfrac{d^2\beta}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{A}_2+\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{B}_{(1,2)}+\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{B}_{(2,3)}+\text{etc.}\\ =\dfrac{d^2\varphi_0}{db^2}\beta+\dfrac{d^2\varphi_0}{dadb}\alpha+\dfrac{d^2\varphi_0}{dbdc}\gamma+\text{etc.};\\ \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{A}_3+\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{B}_{(1,3)}+\dfrac{d^2\beta}{dt^2}\Sigma m\,\mathfrak{B}_{(2,3)}+\text{etc.}\\ =\dfrac{d^2\varphi_0}{dc^2}\gamma+\dfrac{d^2\varphi_0}{dadc}\alpha+\dfrac{d^2\varphi_0}{dbdc}\beta+\text{etc.};\\ .....\end{array}\right.$$

Le nombre de ces équations sera égal à celui des variables indépendantes et, par conséquent, elles suffiront pour déterminer les mouvements des divers points du système.

En examinant ces équations, on observera que les coefficients de $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ et β dans la première équation sont respectivement égaux aux coefficients de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, et α dans la deuxième. De même les coefficients de $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ et γ, p. e., dans la deuxième équation sont égaux à ceux de $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ et β dans la troisième; ainsi des autres. D'où l'on peut conclure que les coefficients des termes que nous appellerons réciproques, sont respectivement égaux deux à deux dans les diverses équations. Cette propriété est une conséquence de la nature des forces que l'on suppose agir sur le système; elle est fondamentale dans la théorie des petites oscillations, et sert, en partie, de base à l'analyse suivie pour la solution des problêmes qui s'y rapportent.

3. D'après ce qui vient d'être exposé, les équations du mouvement oscillatoire d'un système peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$(17) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} & A_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + B_{(1,2)} \frac{d^2\beta}{dt^2} + B_{(1,3)} \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \text{etc.} \\ & + \mathcal{A}_1 \alpha + \mathcal{B}_{(1,2)} \beta + \mathcal{B}_{(1,3)} \gamma + \text{etc.} = 0\ ; \\ & A_2 \frac{d^2\beta}{dt^2} + B_{(1,2)} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + B_{(2,3)} \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \text{etc.} \\ & + \mathcal{A}_2 \beta + \mathcal{B}_{(1,2)} \alpha + \mathcal{B}_{(2,3)} \gamma + \text{etc.} = 0\ ; \\ & A_3 \frac{d^2\gamma}{dt^2} + B_{(1,3)} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + B_{(2,3)} \frac{d^2\beta}{dt^2} + \text{etc.} \\ & + \mathcal{A}_3 \gamma + \mathcal{B}_{(1,3)} \alpha + \mathcal{B}_{(2,3)} \gamma + \text{etc.} = 0\ ; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \end{aligned} \right.$$

où, par abréviation, A_1, A_2, etc....; $B_{(1,2)}$..., $B_{(1,3)}$... etc.; $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{B}_{(1,2)}$......, etc. remplacent respectivement $\Sigma m \mathfrak{A}_1$, $\Sigma m \mathfrak{A}_2$ ...., $\Sigma m \mathfrak{B}_{(1,2)}$; $\Sigma m \mathfrak{B}_{(1,3)}$ etc.; $-\frac{d^2\varphi_0}{da^2}$, $-\frac{d^2\varphi_0}{da\,db}$; etc. dans les éq.ons (16).

Cela posé, sommons ensemble les équations (17), après avoir multiplié la deuxième par p, la troisième par q, et ainsi des autres, on aura:

$$
(18)\ldots \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left\{A_1+pB_{(1,2)}+qB_{(1,3)}+\text{etc.}\right\}\\
&+\frac{d^2\beta}{dt^2}\left\{pA_2+B_{(1,2)}+qB_{(2,3)}+\text{etc.}\right\}\\
&+\frac{d^2\gamma}{dt^2}\left\{qA_3+B_{(1,3)}+B_{(2,3)}+\text{etc.}\right\}+\ldots\ldots\ldots\\
&+\alpha\left\{\mathfrak{A}_1+p\mathfrak{B}_{(1,2)}+q\mathfrak{B}_{(1,3)}\ldots\ldots\right\}\\
&+\beta\left\{p\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_{(1,2)}+q\mathfrak{B}_{(2,3)}\ldots\ldots\right\}\\
&+\gamma\left\{q\mathfrak{A}_3+\mathfrak{B}_{(1,3)}+p\mathfrak{B}_{(2,3)}\ldots\ldots\right\}+\text{etc.}=0\ .
\end{aligned}\right.
$$

Les quantités p, q, etc. étant arbitraires, on pourra les déterminer de manière à ce qu'on ait:

$$
(19)\ldots \left\{
\begin{aligned}
&(a)\ldots\frac{pA_2+B_{(1,2)}+qB_{(2,3)}+\text{etc.}}{A_1+pB_{(1,2)}+qB_{(1,3)}+\text{etc.}}=\frac{p\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_{(1,2)}+q\mathfrak{B}_{(2,3)}+\text{etc.}}{\mathfrak{A}_1+p\mathfrak{B}_{(1,2)}+q\mathfrak{B}_{(1,3)}+\text{etc.}}\ ;\\
&(b)\ldots\frac{qA_3+B_{(1,3)}+pB_{(2,3)}+\text{etc.}}{A_1+pB_{(1,2)}+qB_{(1,3)}+\text{etc.}}=\frac{q\mathfrak{A}_3+\mathfrak{B}_{(1,3)}+p\mathfrak{B}_{(2,3)}+\text{etc.}}{\mathfrak{A}_1+p\mathfrak{B}_{(1,2)}+q\mathfrak{B}_{(1,3)}+\text{etc.}}\ ;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Cela étant, si l'on représente par M l'expression d'un des deux membres de l'équation (a) précédente; par N id. de l'équation (b) etc., et que l'on fasse en outre

$$(20)\ldots \qquad \frac{\mathfrak{A}_1+p\mathfrak{B}_{(1,2)}+q\mathfrak{B}_{(1,3)}+\text{etc.}}{A_1+pB_{(1,2)}+qB_{(1,3)}+\text{etc.}}=k^2\ ,$$

l'équation (18) prendra la forme suivante:

$$(21)\ldots \frac{d^2\alpha}{dt^2}+M\frac{d^2\beta}{dt^2}+N\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\text{etc.}+k^2\left\{\alpha+M\beta+N\gamma+\text{etc.}\right\}=0\ .$$

En faisant

$$(22)\ldots \qquad \alpha+M\beta+N\gamma+\text{etc.}=u\ ,$$

l'équation (21) devient

$$(23) \ldots\ldots \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + k^2 u = 0 \ ;$$

on satisfait à cette dernière en prenant

$$(24) \ldots\ldots \qquad u = H \sin \left\{ kt + h \right\} ,$$

H et h étant deux constantes arbitraires.

D'où l'on conclut

$$(25) \ldots\ldots \qquad \alpha + M\beta + N\gamma + \text{etc.} = H \sin (kt + h) \ .$$

Le nombre des quantités p, q, etc. et k^2 est égal à celui des variables indépendantes, que nous indiquerons par i; l'on a pareillement, pour les déterminer, un nombre i d'équations (19) et (20); il est aisé de voir que, par l'élimination de p, q, etc. entre ces dernières, on obtiendra une équation finale en k^2 du degré i. Nous indiquerons cette équation par

$$(26) \ldots\ldots \qquad (K) = 0 \ ;$$

et, pour k^2, on en déduira, par conséquent, i valeurs différentes; comme p, q, etc. peuvent être exprimés par k^2, il y aura ainsi i valeurs correspondantes de chacune de ces quantités. Il en sera de même de M, N, etc., d'où l'on conclut qu'il y aura i équations de la forme de celle (25) correspondantes chacune à un système de valeurs de M, N, etc. Ces équations seront les suivantes:

$$(27) \ldots\ldots \begin{cases} u_1 = \alpha + M_1\beta + N_1\gamma + \text{etc.} = H_1 \sin (k_1 t + h_1) \ ; \\ u_2 = \alpha + M_2\beta + N_2\gamma + \text{etc.} = H_2 \sin (k_2 t + h_2) \ ; \\ u_3 = \alpha + M_3\beta + N_3\gamma + \text{etc.} = H_3 \sin (k_3 t + h_3) \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_i = \alpha + M_i\beta + N_i\gamma + \text{etc.} = H_i \sin (k_i t + h_i) \ ; \end{cases}$$

où l'on a distingué par des indices, 1, 2 ..... i, les divers systèmes de valeurs de u, M, N ..... H, k et h.

Les variables α, β, γ, etc. étant toutes au premier degré, et leur nombre étant i, on déduira, des équations précédentes, des valeurs de la forme :

$$(28)\ldots\begin{cases}\alpha = L_1 \sin(k_1 t + h_1) + L_2 \sin(k_2 t + h_2) \ldots\ldots + L_i \sin(k_i t + h_i)\ ;\\ \beta = L_1' \sin(k_1 t + h_1) + L_2' \sin(k_2 t + h_2) \ldots\ldots + L_i' \sin(k_i t + h_i)\ ;\\ \gamma = L_1'' \sin(k_1 t + h_1) + L_2'' \sin(k_2 t + h_2) \ldots\ldots + L_i'' \sin(k_i t + h_i)\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Pour découvrir les valeurs des divers coefficients L_1, $L_2 \ldots\ldots L_1'$, L_2' etc. substituons dans les équations (17) du mouvement, les valeurs de α, β, $\gamma \ldots\ldots \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2} \ldots\ldots\ldots$ déduites des équations précédentes, on aura :

$$(29)\ldots\begin{cases}\left.\begin{cases}\mathcal{A}_1 L_1 + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_1' + \mathfrak{B}_{(1,3)} L_1'' + \text{etc.}\\ -k_1^2 (A_1 L_1 + B_{(1,2)} L_1' + B_{(1,3)} L_1'' + \text{etc.})\end{cases}\right\} \sin(k_1 t + h_1)\\ +\left\{\begin{cases}\mathcal{A}_1 L_2 + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_2' + \mathfrak{B}_{(1,3)} L_2'' + \text{etc.}\\ -k_2^2 (A_1 L_2 + B_{(1,2)} L_2' + B_{(1,3)} L_2'' + \text{etc.})\end{cases}\right\} \sin(k_2 t + h_2)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} = 0\ ;$$

$$\begin{cases}\left.\begin{cases}\mathcal{A}_2 L_1' + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_1 + \mathfrak{B}_{(2,3)} L_1'' + \text{etc.}\\ -k_1^2 (A_2 L_1' + B_{(1,2)} L_1 + B_{(2,3)} L_1'' + \text{etc.})\end{cases}\right\} \sin(k_1 t + h_1)\\ +\left\{\begin{cases}\mathcal{A}_2 L_2' + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_2 + \mathfrak{B}_{(2,3)} L_2'' + \text{etc.}\\ -k_2^2 (A_2 L_2' + B_{(1,2)} L_2 + B_{(2,3)} L_2'' + \text{etc.})\end{cases}\right\} \sin(k_2 t + h_2)\\ +\text{etc. etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} = 0\ .$$

Afin que ces équations puissent subsister pendant toute la durée du mouvement, il sera nécessaire que les coefficients des termes périodiques $\sin(k_1 t + h_1)$, $\sin(k_2 t + h_2)$ ..... etc. soient respectivement nuls ; ainsi l'on aura :

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} k_1^2 = \dfrac{\mathfrak{A}_1 L_1 + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_1' + \mathfrak{B}_{(1,3)} L_1'' + \text{etc.}}{A_1 L_1 + B_{(1,2)} L_1' + B_{(1,3)} L_2'' + \text{etc.}} \\ \qquad = \dfrac{\mathfrak{A}_2 L_1' + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_1 + \mathfrak{B}_{(2,3)} L_1'' + \text{etc.}}{A_2 L_1' + B_{(1,2)} L_1 + B_{(2,3)} L_1'' + \text{etc.}} = \text{etc.} \ ; \\ k_2^2 = \dfrac{\mathfrak{A}_1 L_2 + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_2' + \mathfrak{B}_{(1,3)} L_2'' + \text{etc.}}{A_1 L_2 + B_{(1,2)} L_2' + B_{(1,3)} L_2'' + \text{etc.}} \\ \qquad = \dfrac{\mathfrak{A}_2 L_2' + \mathfrak{B}_{(1,2)} L_2 + \mathfrak{B}_{(2,3)} L_2'' + \text{etc.}}{A_2 L_2' + B_{(1,2)} L_2 + B_{(2,3)} L_2'' + \text{etc.}} = \text{etc.} \ ; \\ k_3^2 = \text{etc. etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si, dans ces équations, l'on fait

$$L' = pL \ ; \qquad L'' = qL \ ; \qquad \text{etc.} \ ;$$

on verra que les valeurs de k^2 coïncident avec celles qu'on déduit des équations (19) et (20). Ainsi les expressions de α, β, γ, etc. deviendront

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = L_1 \sin(k_1 t + h_1) + L_2 \sin(k_2 t + L_2) \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + L_i \sin(k_i t + h_i) \ ; \\ \beta = p_1 L_1 \sin(k_1 t + h_1) + p_2 L_2 \sin(k_2 t + L_2) \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + p_i L_i \sin(k_i t + h_i) \ ; \\ \gamma = q_1 L_1 \sin(k_1 t + h_1) + q_2 L_2 \sin(k_2 t + L_2) \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + q_i L_i \sin(k_i t + h_i) \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour déterminer la valeur de L_1, par exemple, nous substituerons ces expressions dans la première équation (27) et l'on aura :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} L_1(1 + p_1 M_1 + q_1 N_1 + \text{etc.}) \sin(k_1 t + h_1) \\ + L_2(1 + p_2 M_1 + q_2 N_1 + \text{etc.}) \sin(k_2 t + h_2) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + L_i(1 + p_i M_1 + q_i N_1 + \text{etc.}) \sin(k_i t + h_i) \end{array}\right\} = H_1 \sin(k_1 t + h_1) \, .$$

Or, à cause que t est variable, cette équation ne peut être satisfaite à moins que les coefficients qui, dans le premier membre, multiplient

$$\sin(k_2 t + h_2) \ldots\ldots\ldots ; \qquad \sin(k_i t + h_i) ,$$

ne soient respectivement nuls ; ce qui réduira l'équation à

$$L_1(1 + p_1 M_1 + q_1 N_1 + \text{etc.}) \sin(k_1 t + h_1) = H_1 \sin(k_1 t + h_1) ,$$

d'où l'on déduit

$$(33) \ldots\ldots\ldots \qquad L_1 = \frac{H_1}{1 + p_1 M_1 + q_1 N_1 + \text{etc.}} .$$

L'on aura aussi, par suite de la condition ci-devant énoncée,

$$(34) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} 1 + p_2 M_1 + q_2 N_1 + \text{etc.} = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 + p_i M_1 + q_i N_1 + \text{etc.} = 0 . \end{cases}$$

On peut conclure de l'analyse précédente que, en général, l'on aura:

$$(35) \ldots\ldots\ldots \qquad L_i = \frac{H_i}{1 + p_i M_i + q_i N_i + \text{etc.}} ,$$

et

$$(36) \ldots\ldots\ldots \qquad 1 + p_i M_j + q_i N_j + \text{etc.} = 0 ,$$

lorsque i et j sont deux indices différents.

Pour déterminer H_i et h_i reprenons les équations (27) et nommons α°, β°, γ°, etc. les valeurs initiales de α, β, γ, etc. Nous désignerons pareillement par $\frac{d\alpha^\circ}{dt}$, $\frac{d\beta^\circ}{dt}$, $\frac{d\gamma^\circ}{dt}$, etc. les valeurs initiales de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, etc. ; on déduira des équations (27), en différentiant et faisant $t = 0$,

$$(37) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} H_i \sin h_i = \alpha^\circ + M_i \beta^\circ + N_i \gamma^\circ + \text{etc.} ; \\ H_i \cos h_i = \frac{1}{k_i} \left\{ \frac{d\alpha^\circ}{dt} + M_i \frac{d\beta^\circ}{dt} + N_i \frac{d\gamma^\circ}{dt} + \text{etc.} \right\} . \end{cases}$$

Au moyen de ces équations et des précédentes toutes les quantités arbitraires sont déterminées, et la solution du problème est complète.

4. Les résultats que nous venons d'obtenir sont identiques avec ceux donnés par LAGRANGE dans sa *Mécanique analytique;* mais le procédé que nous avons suivi pour y arriver, diffère en un point essentiel de celui de LAGRANGE. En effet, cet illustre Géomètre et tous ceux qui ont traité après lui la question des petites oscillations, supposent *à priori* que l'on satisfait aux équations du mouvement par des expressions de la forme

$$\alpha = L\sin(kt+h) \;;$$

$$\beta = pL\sin(kt+h) \;;$$

$$\gamma = qL\sin(kt+h) \;;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ensuite ils en concluent que l'expression de chacune des variables doit être composée d'un nombre de termes périodiques égal à celui des variables, et ayant entr'eux, de terme à terme, les rapports indiqués par les relations précédentes.

Comme on le voit, il y a dans cette marche une espèce de *cercle vicieux*, car l'on commence d'abord par admettre que les valeurs des variables ont des rapports constants entr'eux pendant toute la durée du mouvement; et l'on démontre ensuite que ces rapports constants n'existent réellement que pour les termes périodiques correspondants qui composent les expressions de ces mêmes variables. Nous partons au contraire d'un autre principe tout-à-fait incontestable qui se présente pour ainsi dire de lui-même, et qui consiste en ce que, vu la forme des équations du mouvement, il y a un certain nombre de *combinaisons linéaires des variables indépendantes*, qui ont respectivement pour expression une fonction circulaire représentant le mouvement d'un pendule simple, c'est-à-dire un mouvement isochrone. On démontre que *le nombre de ces combinaisons linéaires est égal à celui des variables indépendantes;* d'où l'on conclut que chaque variable est exprimée par un nombre de termes circulaires égal à celui même des variables. Les coefficients de chacun de ces termes circulaires se déduisent des conditions initiales du mouvement. En un mot, le mouvement d'un point du système se compose de la superposition d'un nombre de mouvements isochrones égal à celui des variables indépendantes.

5. Nous avons supposé que le système avait été fort peu écarté d'une position d'équilibre *stable*, il doit donc exécuter autour de cette position une série d'oscillations dont les lois viennent d'être déterminées. Mais afin que le mouvement soit réellement oscillatoire, il sera nécessaire que toutes les valeurs de k^2, déduites de l'équation (26), soient réelles et positives. Différemment la fonction circulaire

$$\sin\left\{kt+h\right\},$$

correspondante à une racine négative ou imaginaire, deviendrait de la forme

$$\sin\left\{(\lambda+\varepsilon.\sqrt{-1})\,t+\mu\right\},$$

et se changerait en exponentielle. Par conséquent les coordonnées varieraient indéfiniment avec le temps, et le mouvement cesserait d'être oscillatoire. Il est en outre nécessaire que les racines de l'équation

$$(26)\ \ldots\ldots\ldots\qquad (K)=0$$

soient toutes inégales. Pour le démontrer, considérons les équations (27) qui servent à déterminer les valeurs de α, β, γ, etc. et dont le nombre est égal à celui des variables indépendantes. Cela posé remarquons que les coefficients M_1, N_1 .....; H_1, h_1; M_2, N_2 .....; H_2, h_2, etc. etc. sont respectivement fonctions de k_1^2, k_2^2, etc., par conséquent s'il y avait deux ou un plus grand nombre de valeurs de k égales entr'elles, le nombre des équations (27) se réduirait d'autant; et comme il ne se trouverait plus égal à celui des variables, il s'ensuivrait que les valeurs de ces variables seraient indéterminées, ce qui pourtant ne saurait être. Mais voici comment on peut résoudre cette difficulté: supposons, par exemple, que les deux racines égales soient k_1 et k_2; nous ferons pour le moment

$$(a)\ \ldots\ldots\qquad k_2=k_1+\chi\ ;$$

et nous écrirons les deux premières équations (27) sous la forme suivante

$$(b)\ \ldots\ldots\ \alpha+M_1\beta+N_1\gamma+\text{etc.}=E_1\sin k_1 t+F_1\cos k_1 t\ ;$$

$$(c)\ \ldots\ldots\ \alpha+M_2\beta+N_2\gamma+\text{etc.}=E_2\sin k_2 t+F_2\cos k_2 t\ ;$$

où $\qquad E_1=H_1\cos h_1\ ;\qquad F_1=H_1\sin h_1\ ;\qquad$ etc. etc.

En substituant dans l'équation (*c*) pour k_2 sa valeur $k_1+\chi$, et développant, d'après le théorème de TAYLOR, on aura :

$$(d)\cdot\begin{cases}\alpha+M_1\beta+N_1\gamma+\text{etc.}+\chi\left\{\beta\dfrac{dM_1}{dk}+\gamma\dfrac{dN_1}{dk}+\text{etc.}\right\}+\chi^2.V\\ =E_1\sin k_1t+F_1\cos k_1t+\chi\left[\begin{matrix}t\{E_1\cos k_1t-F_1\sin k_1t\}\\ +\dfrac{dE_1}{dk}\sin k_1t+\dfrac{dF_1}{dk}\cos k_1t\end{matrix}\right]+\chi^2.T\end{cases};$$

où $\chi^2.V$ et $\chi^2.T$ représentent les termes qui contiennent χ à une puissance supérieure à la première.

Or, en vertu de l'équation (*b*), cette dernière se réduit à la suivante où l'on a supprimé le facteur χ commun à tous les termes :

$$(e)\cdot\begin{cases}\beta\dfrac{dM_1}{dk}+\gamma\dfrac{dN_1}{dk}+\text{etc.}\ \chi.V\\ =\dfrac{dE_1}{dk}\sin k_1t+\dfrac{dF_1}{dk}\cos k_1t+t\{E_1\cos k_1t-F_1\sin k_1t\}+\chi.T\end{cases}.$$

Pour avoir $k_1=k_2$ il faut faire $\chi=0$, et alors l'équation précédente se réduit à

$$(f)\cdot\begin{cases}\beta\dfrac{dM_1}{dk}+\gamma\dfrac{dN_1}{dk}+\text{etc.}\\ =\dfrac{dE_1}{dk}\sin k_1t+\dfrac{dF_1}{dk}\cos k_1t+t\{E_1\cos k_1t-F_1\sin k_1t\}\end{cases},$$

qui remplacera l'équation (*c*); ainsi l'indétermination apparente qui avait lieu précédemment cessera d'exister.

On aura évidemment pour $\dfrac{dE_1}{dk}$ et $\dfrac{dF_1}{dk}$ les valeurs suivantes :

$$(38)\ \ldots\ldots\begin{cases}\dfrac{dF_1}{dk}=\beta^0\dfrac{dM_1}{dk}+\gamma^0\dfrac{dN_1}{dk}+\text{etc.}\ ;\\ \dfrac{dE_1}{dk}=\dfrac{1}{k_1}\left\{\dfrac{d\beta^0}{dt}\cdot\dfrac{dM_1}{dk}+\dfrac{d\gamma^0}{dt}\cdot\dfrac{dN_1}{dk}+\text{etc.}-E_1\right\}.\end{cases}$$

Si l'on avait trois ou un plus grand nombre de racines égales, on

procéderait d'une manière analogue pour obtenir les équations du mouvement. Comme on le voit, la présence de racines égales dans l'équation $(K)=0$, indique l'introduction dans les équations du mouvement de termes qui croissent avec le temps; par conséquent le mouvement cesse d'être oscillatoire et les variables peuvent augmenter indéfiniment.

Dans ce cas, comme dans celui où les valeurs de k^2 sont négatives ou imaginaires, les équations du mouvement, auxquelles nous sommes arrivés, ne peuvent représenter l'état du système que pendant un temps fort-court passé lequel, les variables ayant acquis de trop grandes valeurs, on ne peut plus en négliger les puissances supérieures à la première, ainsi qu'il a été fait dans l'analyse précédente.

Remarquons que, dans certains cas particuliers, il peut se faire que les coefficients des termes correspondants aux valeurs de k^2 négatives, imaginaires ou égales, soient nuls en vertu des dispositions spéciales du système et des conditions initiales du mouvement; alors le mouvement pourra encore être simplement oscillatoire; mais ce sont des cas purement exceptionnels qui n'infirment nullement les principes posés précédemment.

Sans avoir recours aux considérations mécaniques que nous avons employées, on démontre directement aussi que, lorsque

$$\varphi(a_0, b_0, c_0, \text{etc.}) \qquad (\text{Voir l'équation (3)})$$

est un maximum, toutes les racines de l'équation (26)

$$(K)=0$$

sont réelles, positives et inégales.

6. On peut demander à quelles conditions doivent satisfaire les ordonnées et les vîtesses initiales du système, afin que les mouvements vibratoires des divers points soient sinchrones, c'est-à-dire afin que les termes circulaires qui entrent dans l'expression de chaque variable se réduisent à un seul, au premier par exemple.

Pour cela il sera nécessaire, que les coefficients de ces termes soient nuls à l'exception de celui du premier; ainsi, d'après les équations (37), l'on conclura qu'on doit avoir:

$$(39) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \alpha^\circ + \beta^\circ . M_i + \gamma^\circ . N_i + \text{etc.} = 0 \; ; \\ \dfrac{d\alpha^\circ}{dt} + \dfrac{d\beta^\circ}{dt} M_i + \dfrac{d\gamma^\circ}{dt} N_i + \text{etc.} = 0 \; ; \end{array} \right.$$

pour tous les indices, excepté pour $i = 1$. Ainsi l'on aura

$$(40) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \alpha^\circ + \beta^\circ . M_2 + \gamma^\circ . N_2 + \text{etc.} = 0 \; ; \\ \dfrac{d\alpha^\circ}{dt} + \dfrac{d\beta^\circ}{dt} M_2 + \dfrac{d\gamma^\circ}{dt} N_2 + \text{etc.} = 0 \; ; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha^\circ + \beta^\circ . M_3 + \gamma^\circ . N_3 + \text{etc.} = 0 \; ; \\ \dfrac{d\alpha^\circ}{dt} + \dfrac{d\beta^\circ}{dt} M_3 + \dfrac{d\gamma^\circ}{dt} N_3 + \text{etc.} = 0 \; ; \end{array} \right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; \\ \text{etc. etc.} \end{array} \right.$$

On satisfait à toutes ces équations en prenant

$$(41) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} \beta^\circ = p_1 \alpha^\circ \; ; & \gamma^\circ = q_1 \alpha^\circ \ldots \; ; \\ \dfrac{d\beta^\circ}{dt} = p_1 \dfrac{d\alpha^\circ}{dt} \; ; & \dfrac{d\gamma^\circ}{dt} = q_1 \dfrac{d\alpha^\circ}{dt} \; ; \end{array} \right.$$

ce qui réduira les équations (40) aux suivantes :

$$1 + p_1 M_2 + q_1 N_2 + \text{etc.} = 0 \; ;$$
$$1 + p_1 M_3 + q_1 N_3 + \text{etc.} = 0 \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ;$$

qui rentrent dans l'équation (36) déjà obtenue précédemment. On conclut aussi des équations (41) que

$$(42) \ldots\ldots \quad \alpha^\circ : \frac{d\alpha^\circ}{dt} = \beta^\circ : \frac{d\beta^\circ}{dt} = \gamma^\circ : \frac{d\gamma^\circ}{dt} = \text{etc.} \; ;$$

ce qui veut dire que, lorsque les rapports des vîtesses et des déplacements initiaux de chaque point du système sont égaux, et que de plus

ces vîtesses ont entr'elles les rapports sus-indiqués, tous les points du système exécuteront des oscillations sinchrones.

Pour que les mouvements vibratoires du système se réduisent à trois par exemple, correspondant respectivement à k_1, k_2, k_3, on fera

$$(43)\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases} \beta^\circ = \frac{1}{3}\cdot\alpha^\circ\,(p_1+p_2+p_3)\ ; \\ \gamma^\circ = \frac{1}{3}\cdot\alpha^\circ\,(q_1+q_2+q_3)\ ; \\ \text{etc.}\ ; \\ \frac{d\beta^\circ}{dt} = \frac{1}{3}\cdot\frac{d\alpha^\circ}{dt}\,(p_1+p_2+p_3)\ ; \\ \frac{d\gamma^\circ}{dt} = \frac{1}{3}\cdot\frac{d\alpha^\circ}{dt}\,(q_1+q_2+q_3)\ ; \\ \text{etc. etc.}\ ; \end{cases}$$

Au moyen de ces valeurs, les équations (40) seront satisfaites pour tous les indices qui diffèrent de 1, 2 et 3.

On procéderait d'une manière analogue si l'on voulait conserver un plus grand nombre de termes dans les expressions des variables.

Dans les exemples qui vont suivre, nous ferons une constante application des principes qui viennent d'être développés, et l'on verra comment la méthode générale que nous avons indiquée, s'applique, avec avantage, à la solution des divers problêmes qui se présentent dans la théorie des petites oscillations.

§ II.

Mouvements vibratoires d'un point matériel attiré par plusieurs centres fixes.

7. Soient m la masse d'un point matériel ; a, b, c ses coordonnées rectangulaires correspondantes à sa position d'équilibre ; $a+x$, $b+y$, $c+z$ les coordonnées du même point à un instant quelconque du mouvement correspondant au temps t. Quel que soit le nombre des centres fixes qui agissent sur le point en question, s'il a été fort peu écarté d'une position d'équilibre stable, les variables x, y, z se maintiendront toujours très-petites pendant toute la durée du mouvement, et, d'après ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent, les équations du mouvement seront de la forme suivante

$$(44)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} m.\dfrac{d^2x}{dt^2}+Ax+My+Nz=0\ ; \\ m.\dfrac{d^2y}{dt^2}+By+Mx+Pz=0\ ; \\ m.\dfrac{d^2z}{dt^2}+Cz+Nx+Py=0\ . \end{cases}$$

En sommant ensemble ces trois équations, après avoir multiplié la 2.ème par p et la 3.ème par q, on aura

$$(45)\ \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{d^2y}{dt^2}+q\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$+\frac{A+pM+qN}{m}\left\{x+\frac{M+pB+qP}{A+pM+qN}y+\frac{N+pP+qC}{A+pM+qN}z\right\}=0\ .$$

Les valeurs de p et q se détermineront par les équations suivantes :

$$(46)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} p=\dfrac{M+pB+qP}{A+pM+qN}\ ; \\ q=\dfrac{N+pP+qC}{A+pM+qN}\ . \end{cases}$$

En faisant par abréviation

$$(47)\ \ldots\ldots\ldots \qquad k^2 = \frac{A + pM + qN}{m} ,$$

l'équation (45) prendra la forme

$$(48)\ \ldots\ldots \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{d^2y}{dt^2} + q\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(x + py + qz) = 0 .$$

Posons

$$(49)\ \ldots\ldots\ldots \qquad x + py + qz = u ,$$

l'équation (48) devient

$$(50)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + k^2u = 0 ,$$

et l'on y satisfait en prenant

$$(51)\ \ldots\ldots\ldots \qquad u = E\sin(kt + \varepsilon) ;$$

où E et ε sont deux constantes arbitraires qu'il faut déterminer d'après les conditions initiales du mouvement.

En éliminant p et q entre les équations (46) et (47) on aura une équation en k^2 du 3.ème degré qui donnera, pour k^2, trois valeurs différentes et autant de valeurs correspondantes de p et q. En accentuant ces différentes valeurs, pour les distinguer les unes des autres, on aura, pour les expressions correspondantes de u,

$$(52)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} u' = E'\sin(k't + \varepsilon') ; \\ u'' = E''\sin(k''t + \varepsilon'') ; \\ u''' = E'''\sin(k'''t + \varepsilon''') ; \end{cases}$$

équations que l'on peut écrire comme il suit, en mettant pour u', u'', u''' leurs valeurs en x, y, z :

$$(53)\ \ldots\ldots \qquad \begin{cases} x + p'y + q'z = E'\sin(k't + \varepsilon') ; \\ x + p''y + q''z = E''\sin(k''t + \varepsilon'') ; \\ x + p'''y + q'''z = E'''\sin(k'''t + \varepsilon''') . \end{cases}$$

De ces trois équations on déduit les valeurs de x, y, z qui sont évidemment de la forme :

$$(54)\ldots\quad \begin{cases} x = H'\sin(k't+\varepsilon') + H''\sin(k''t+\varepsilon'') + H'''\sin(k'''t+\varepsilon''') ; \\ y = K'\sin(k't+\varepsilon') + K''\sin(k''t+\varepsilon'') + K'''\sin(k'''t+\varepsilon''') ; \\ z = L'\sin(k't+\varepsilon') + L''\sin(k''t+\varepsilon'') + L'''\sin(k'''t+\varepsilon''') . \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (44) du mouvement, ces dernières devront être satisfaites par identité ; ainsi les coefficients de $\sin(k't+\varepsilon')$, $\sin(k''t+\varepsilon'')$, $\sin(k'''t+\varepsilon''')$ devront être respectivement nuls dans ces trois équations, ce qui donnera :

$$(55)\ldots\quad \begin{cases} k'^2 = \dfrac{A+\dfrac{K'}{H'}M+\dfrac{L'}{H'}N}{m} ; \qquad \dfrac{K'}{H'} = \dfrac{M+\dfrac{K'}{H'}B+\dfrac{L'}{H'}P}{A+\dfrac{B'}{H'}M+\dfrac{L'}{H'}N} ; \\ \qquad\qquad \dfrac{L'}{H'} = \dfrac{N+\dfrac{K'}{H'}P+\dfrac{L'}{H'}C}{A+\dfrac{K'}{H'}M+\dfrac{L'}{H'}C} ; \qquad \text{etc.} \\ k''^2 = \dfrac{A+\dfrac{K''}{H''}M+\dfrac{L''}{H''}N}{m} ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Si l'on compare ces équations aux équations (46) et (47), on voit qu'on y satisfaira en prenant

$$(56)\ldots\ldots\quad \frac{K}{H} = p ; \qquad \frac{L}{H} = q ;$$

d'où l'on voit que les équations (54) deviendront de la forme :

$$(57)\ldots\quad \begin{cases} x = H'\sin(k't+\varepsilon') + H''\sin(k''t+\varepsilon'') + H'''\sin(k'''t+\varepsilon''') ; \\ y = p'H'\sin(k't+\varepsilon') + p''H''\sin(k''t+\varepsilon'') + p'''H'''\sin(k'''t+\varepsilon''') ; \\ z = q'H'\sin(k't+\varepsilon') + q''H''\sin(k''t+\varepsilon'') + q'''H'''\sin(k'''t+\varepsilon''') . \end{cases}$$

8. Il reste maintenant à déterminer les valeurs de H', H'', H''' ; pour cela reprenons l'équation (51) dans laquelle on substituera pour u son expression en x, y, z, déduite de l'équation (49) : on aura

$$(58) \ldots\ldots \qquad x+py+qz=E\sin(kt+\varepsilon) .$$

Cette équation fournit trois équations distinctes en y substituant successivement au lieu des valeurs générales p, q, k, E, ε, leurs valeurs particulières p', q', k', E', ε' ; p'', q'', etc. ; p''', q''', etc.

Ainsi l'on aura

$$(59) \ldots\ldots \begin{cases} x+p'y+q'z=E'\sin(k't+\varepsilon') ; \\ x+p''y+q''z=E''\sin(k''t+\varepsilon'') ; \\ x+p'''y+q'''z=E'''\sin(k'''t+\varepsilon''') ; \end{cases}$$

substituons dans la première de ces équations les expressions de x, y, z, déduites des équations (56), il viendra

$$(60) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} (1+p'^2+q'^2)H'\sin(k't+\varepsilon') \\ +(1+p'p''+q'q'')H''\sin(k''t+\varepsilon'') \\ +(1+p'p'''+q'q''')H'''\sin(k'''t+\varepsilon''') \end{array} \right\} = E'\sin(k't+\varepsilon') .$$

Cette équation ne peut évidemment être satisfaite qu'autant qu'on a

$$(61) \ldots\ldots \begin{cases} (1+p'^2+q'^2)H'=E' ; \\ 1+p'p''+q'q''=0 ; \qquad 1+p'p'''+q'q'''=0 . \end{cases}$$

On déduira des résultats analogues des deux autres équations (59), d'où l'on conclut que, en général, l'on a :

$$(62) \ldots\ldots \begin{cases} H'=\dfrac{E'}{1+p'^2+q'^2} ; \\ H''=\dfrac{E''}{1+p''^2+q''^2} ; \qquad H'''=\dfrac{E'''}{1+p'''^2+q'''^2} ; \end{cases}$$

$$(63) \ldots\ldots \begin{cases} 1+p'p''+q'q''=0 ; \\ 1+p'p'''+q'q'''=0 ; \qquad 1+p''p'''+q''q'''=0 . \end{cases}$$

Désignons par α, β, γ les valeurs initiales de x, y, z; par $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ les composantes suivant les axes des x, y, z de la vîtesse initiale du point matériel, on déduira des équations (59):

$$(64)\ldots\begin{cases} E'\sin\varepsilon' = \alpha + p'\beta + q'\gamma\ ; & E'k'\cos\varepsilon' = \bar{\alpha} + p'\bar{\beta} + q'\bar{\gamma}\ ; \\ E''\sin\varepsilon'' = \alpha + p''\beta + q''\gamma\ ; & E''k''\cos\varepsilon'' = \bar{\alpha} + p''\bar{\beta} + q''\bar{\gamma}\ ; \\ E'''\sin\varepsilon''' = \alpha + p'''\beta + q'''\gamma\ ; & E'''k'''\cos\varepsilon''' = \bar{\alpha} + p'''\bar{\beta} + q'''\bar{\gamma}\ ; \end{cases}$$

en substituant dans les équations (56) les valeurs de H', H'', H'''; $\sin\varepsilon'$, $\cos\varepsilon'$, etc., déduites des équations (62) et (64), on aura les expressions suivantes des coordonnées:

$$(65)\ldots\begin{cases} x = \sum\cdot \dfrac{\alpha + p\beta + q\gamma}{1 + p^2 + q^2}\cos kt + \sum\cdot \dfrac{\bar{\alpha} + p\bar{\beta} + q\bar{\gamma}}{k(1 + p^2 + q^2)}\sin kt\ ; \\ y = \sum\cdot \dfrac{p(\alpha + p\beta + q\gamma)}{1 + p^2 + q^2}\cos kt + \sum\cdot \dfrac{p(\bar{\alpha} + p\bar{\beta} + q\bar{\gamma})}{k(1 + p^2 + q^2)}\sin kt\ ; \\ z = \sum\cdot \dfrac{q(\alpha + p\beta + q\gamma)}{1 + p^2 + q^2}\cos kt + \sum\cdot \dfrac{q(\bar{\alpha} + p\bar{\beta} + q\bar{\gamma})}{k(1 + p^2 + q)^2}\sin kt\ . \end{cases}$$

Dans ces équations le signe $\sum\cdot$ indique la somme des termes analogues correspondants chacun à une des valeurs k.

9. Des équations (59) et (61) on déduit une propriété remarquable du mouvement vibratoire dont il s'agit. Pour cela reprenons l'équation

$$x + p'y + q'z = E'\sin(k't + \varepsilon')\ ;$$

faisons $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, l exprimant la distance du point matériel à sa position d'équilibre que l'on suppose coïncider avec l'origine des coordonnées; considérons une droite passant par cette origine et qui fasse avec les axes des x, y, z les angles φ', θ', ψ'; si l'on désigne par ω' l'angle que fait cette droite avec celle qui unit le point matériel avec l'origine, et par h' la projection de la distance l sur la droite $(\varphi', \theta', \psi')$, on aura

$$h' = l\cos\omega'\ .$$

Or

$$\cos\omega' = \frac{x}{l}\cos\varphi' + \frac{y}{l}\cos\theta' + \frac{z}{l}\cos\psi'\ ;$$

en substituant il viendra

$$h' = x\cos\varphi' + y\cos\theta' + z\cos\psi' \ .$$

Cela posé, prenons

$$\cos\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}} \ ; \qquad \cos\theta' = \frac{p'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}} \ ;$$

$$\cos\psi' = \frac{q'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}} \ ;$$

l'expression de h' deviendra

$$(66)\ldots\ h' = \frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}\left\{x+p'y+q'z\right\} = \frac{E'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}\sin(k't+\varepsilon') \ .$$

D'où l'on conclut que le point matériel (m) projeté sur la droite $(\varphi', \theta', \psi')$ déterminée comme précédemment, y exécute des oscillations isochrones. Cette droite n'est pas la seule qui jouisse de cette propriété; il y en a encore deux autres $(\varphi'', \theta'', \psi'')$; $(\varphi''', \theta''', \psi''')$ déterminées respectivement par les relations

$$\cos\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1+p''^2+q''^2}} \ ; \qquad \cos\varphi''' = \frac{1}{\sqrt{1+p'''^2+q'''^2}} \ ;$$

$$\cos\theta'' = \frac{p''}{\sqrt{1+p''^2+q''^2}} \ ; \qquad \cos\theta''' = \frac{p'''}{\sqrt{1+p'''^2+q'''^2}} \ ;$$

$$\cos\psi'' = \frac{q''}{\sqrt{1+p''^2+q''^2}} \ ; \qquad \cos\psi''' = \frac{q'''}{\sqrt{1+p'''^2+q'''^2}} \ .$$

En nommant h'' et h''' les projections de la distance l sur chacune de ces droites, on aura

$$(67)\cdot\begin{cases} h'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+p''^2+q''^2}}\left\{x+p''y+q''z\right\} = \dfrac{E''}{\sqrt{1+p''^2+q''^2}}\sin(k''t+\varepsilon'') \ ; \\ h''' = \dfrac{1}{\sqrt{1+p'''^2+q'''^2}}\left\{x+p'''y+q'''z\right\} = \dfrac{E'''}{\sqrt{1+p'''^2+q'''^2}}\sin(k'''t+\varepsilon''') \ . \end{cases}$$

En vertu des équations (63) l'on a

$$\cos\varphi' \cos\varphi'' + \cos\theta' \cos\theta'' + \cos\psi' \cos\psi'' = 0 \ ;$$

$$\cos\varphi' \cos\varphi''' + \cos\theta' \cos\theta''' + \cos\psi' \cos\psi''' = 0 \ ;$$

$$\cos\varphi'' \cos\varphi''' + \cos\theta'' \cos\theta''' + \cos\psi'' \cos\psi''' = 0 \ .$$

D'où l'on conclut que les trois droites $(\varphi', \theta', \psi')$, $(\varphi'', \theta'', \psi'')$, $(\varphi''', \theta''', \psi''')$ sont orthogonales entr'elles ; observons en outre que les positions de ces trois droites sont indépendantes des conditions initiales du mouvement.

Ainsi il y a un système fixe de trois axes orthogonaux suivant chacun desquels le point matériel (m) exécute des oscillations isochrones ; l'amplitude et la durée de ces oscillations diffèrent d'un axe à l'autre. Ce résultat est une conséquence du principe général que nous avons établi dans le 1er paragraphe, savoir, que, dans tout mouvement vibratoire, il y a un nombre de combinaisons linéaires des variables, égal à celui des variables indépendantes, et dont les valeurs sont, chacune, exprimées suivant la loi du mouvement d'un pendule simple.

§ III.

Mouvements vibratoires d'un fil flexible, fixé par une de ses extrémités et chargé de deux masses pesantes, placées l'une à l'extrémité inférieure du fil, et l'autre en un point intermédiaire de sa longueur.

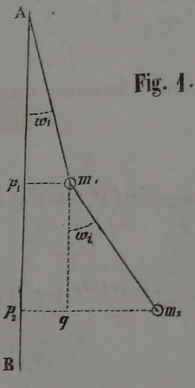


Fig. 1.

10. Pour simplifier le problème, nous ferons abstraction du poids du fil, et nous supposerons que le mouvement a lieu dans un même plan vertical. Nous emploierons les indications suivantes (Voir fig. 1) :

AB . . . . . axe vertical ;

A . . . . . point de suspension du fil Am_1m_2 ;

m_1 ; m_2 . . masses des deux points matériels placés en m_1 et m_2 ;

$\overline{p_1m_1} = y_1$; $\overline{p_2m_2} = y_2$; $\overline{Am_1} = l_1$; $\overline{m_1m_2} = l_2$;

T_1 = tension de la portion de fil $\overline{Am_1}$;

T_2 = tension de la partie de fil $\overline{m_1 m_2}$;

ω_1, ω_2, angles avec la verticale des éléments du fil $\overline{Am_1}$ et $\overline{m_1 m_2}$.

La force motrice qui agit sur le point m_1 sera égale à

$$-T_1 \sin\omega_1 + T_2 \sin\omega_2 ,$$

et celle qui agit sur le point m_2, sera

$$-T_2 \sin\omega_2 .$$

Nous admettrons que ω_1 et ω_2 restent toujours très-petits pendant toute la durée du mouvement ; ainsi l'on aura sensiblement

$$T_1 = (m_1 + m_2)g , \qquad T_2 = m_2 g ,$$

g étant la gravité ; or

$$\sin\omega_1 = \frac{y_1}{l_1} , \qquad \sin\omega_2 = \frac{\overline{qm_2}}{l_2} = \frac{y_2 - y_1}{l_2} ;$$

par conséquent l'on aura :

$$(68) \ldots \begin{cases} -T_1 \sin\omega_1 + T_2 \sin\omega_2 = g\left\{-y_1\left(\dfrac{m_1+m_2}{l_1} + \dfrac{m_2}{l_2}\right) + \dfrac{y_2}{l_2} m_2\right\} ; \\ -T_2 \sin\omega_2 = -m_2 g \dfrac{y_2 - y_1}{l_2} ; \end{cases}$$

et par suite les équations du mouvement seront

$$(69) \ldots \ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = g\left\{-y_1\left(\dfrac{m_1+m_2}{l_1} + \dfrac{m_2}{l_2}\right) + y_2 \dfrac{m_2}{l_2}\right\} ; \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -g\left\{y_2 \dfrac{m_2}{l_2} - y_1 \dfrac{m_2}{l_2}\right\} . \end{cases}$$

En faisant, pour avoir des expressions plus générales,

$$(70) \ldots \ldots \qquad A = \left(\frac{m_1+m_2}{l_1} + \frac{m_2}{l_2}\right) g , \qquad B = \frac{m_2}{l_2} g ,$$

les équations (69) prendront la forme suivante :

$$(71) \ldots \ldots \ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} + A y_1 - B y_2 = 0 ; \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} + B y_2 - B y_1 = 0 . \end{cases}$$

En sommant la seconde de ces équations avec la première, après l'avoir multipliée par p, et en appliquant les principes déjà développés précédemment, on aura

$$(72)\ldots\ldots m_1\left\{\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}+\frac{m_2}{m_1}p\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}\right\}+(A-Bp)\left\{\gamma_1+\gamma_2\frac{Bp-B}{A-Bp}\right\}=0\ ;$$

$$(73)\ldots\ldots \frac{m_2}{m_1}p=\frac{Bp-B}{A-Bp}\ ;$$

$$(74)\ldots\ldots A-Bp=k^2m_1\ .$$

De ces deux dernières équations on déduit

$$(75)\ldots\ldots p=\frac{Am_2-Bm_1}{2Bm_2}\pm\sqrt{\frac{(Am_2-Bm_1)^2}{4B^2m_2^2}+\frac{m_1}{m_2}}\ ;$$

$$(76)\ldots\ldots k=\sqrt{\frac{A-Bp}{m_1}}\ .$$

En mettant pour A, B leurs valeurs, il viendra

$$(77)\ldots\ldots\begin{cases} p'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_2}+1-\frac{m_1}{m_2}\right) \\ \qquad +\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_2}+1-\frac{m_1}{m_2}\right)^2+\frac{m_1}{m_2}}\ ; \\ p''=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_2}+1-\frac{m_1}{m_2}\right) \\ \qquad -\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_2}+1-\frac{m_1}{m_2}\right)^2+\frac{m_1}{m_2}}\ ; \end{cases}$$

$$(78)\begin{cases} k'=\sqrt{\frac{g}{2l_1l_2}\left\{\frac{(m_1+m_2)(l_1+l_2)}{m_1}-\sqrt{\frac{(m_1+m_2)^2(l_1+l_2)^2}{m_1^2}-\frac{4\cdot l_1l_2(m_1+m_2)}{m_1}}\right\}}\ ; \\ k''=\sqrt{\frac{g}{2l_1l_2}\left\{\frac{(m_1+m_2)(l_1+l_2)}{m_1}+\sqrt{\frac{(m_1+m_2)^2(l_1+l_2)^2}{m_1^2}-\frac{4\cdot l_1l_2(m_1+m_2)}{m_1}}\right\}}\ . \end{cases}$$

L'équation (72) conduit aux suivantes

$$(79)\ \ldots\ldots \begin{cases} \gamma_1 + p' \dfrac{m_2}{m_1}\gamma_2 = L' \sin\left\{k' t + \varepsilon'\right\} ; \\ \gamma_1 + p'' \dfrac{m_2}{m_1}\gamma_2 = L'' \sin\left\{k'' t + \varepsilon''\right\} ; \end{cases}$$

$$(80)\ \ldots\ldots \begin{cases} \gamma_1 = H' \sin\left\{k' t + \varepsilon'\right\} + H'' \sin\left\{k'' t + \varepsilon''\right\} ; \\ \gamma_2 = p' H' \sin\left\{k' t + \varepsilon'\right\} + p'' H'' \sin\left\{k'' t + \varepsilon''\right\} ; \end{cases}$$

$$(81)\ \ldots\ldots \quad H' = \frac{L'}{1 + p'^2 \dfrac{m_2}{m_1}} ; \qquad H'' = \frac{L''}{1 + p''^2 \dfrac{m_2}{m_1}} .$$

Si α_1, α_2; $\overline{\alpha_1}$, $\overline{\alpha_2}$ représentent les ordonnées et les vîtesses initiales des masses m_1 et m_2, l'on aura

$$(82)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} H' \sin . \varepsilon' = \dfrac{\alpha_1 + p' \dfrac{m_2}{m_1}\alpha_2}{1 + p'^2 \dfrac{m_2}{m_1}} ; \\ H'' \sin . \varepsilon'' = \dfrac{\alpha_1 + p'' \dfrac{m_2}{m_1}\alpha_2}{1 + p''^2 \dfrac{m_2}{m_1}} ; \\ H' \cos . \varepsilon' = \dfrac{1}{k'} \cdot \dfrac{\overline{\alpha_1} + p' \dfrac{m_2}{m_1}\overline{\alpha_2}}{1 + p'^2 \dfrac{m_2}{m_1}} ; \\ H'' \cos . \varepsilon'' = \dfrac{1}{k''} \cdot \dfrac{\overline{\alpha_1} + p'' \dfrac{m_2}{m_1}\overline{\alpha_2}}{1 + p''^2 \dfrac{m_2}{m_1}} . \end{cases}$$

Des équations (79) et (80), aussi bien que des équations (77), on déduit la relation

$$(83)\ \ldots\ldots\ldots \quad 1 + \frac{m_2}{m_1} p' p'' = 0 .$$

Les équations précédentes contiennent la solution complète du problême des oscillations des points m_1 et m_2.

11. Sur la droite $\overline{m_1 m_2}$ (fig. 2) prenons un point μ situé à une distance $m_1\mu = \lambda$ du point $\overline{m_1}$, conduisons $\overline{m_1 q}$ parallèle à AB ; l'ordonnée de ce point μ, que nous désignerons par z sera :

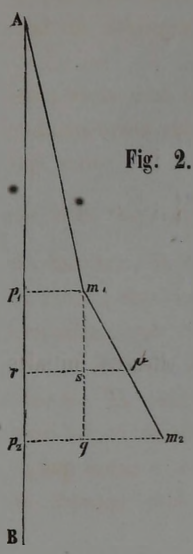


Fig. 2.

$$(84)\ldots \quad \begin{cases} z = \overline{rs} + \overline{s\mu} = \overline{p_1 m_1} + (\overline{p_2 m_2} - \overline{p_1 m_1}) \dfrac{\overline{m_1 \mu}}{\overline{m_1 m_2}}, \\ \text{ou bien} \\ z = y_1 + (y_2 - y_1) \dfrac{\lambda}{l_2} \\ = \left(1 - \dfrac{\lambda}{l_2}\right) \cdot \left(y_1 + \dfrac{\lambda}{l_2 - \lambda} y_2\right) ; \end{cases}$$

si l'on fait successivement

$$(85)\ldots \quad \frac{\lambda}{l_2 - \lambda} = p' \frac{m_2}{m_1}, \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{l_2 - \lambda} = p'' \frac{m_2}{m_1},$$

on aura, pour les deux valeurs correspondantes de λ que nous désignerons par λ' et λ'',

$$(86)\ldots\ldots \quad \lambda' = l_2 \frac{p' \frac{m_2}{m_1}}{1 + p' \frac{m_2}{m_1}} ; \qquad \lambda'' = l_2 \frac{p'' \frac{m_2}{m_1}}{1 + p'' \frac{m_2}{m_1}} .$$

En représentant pareillement par z' et z'' les deux valeurs de z correspondantes, il viendra

$$(87)\ldots\ldots \quad \begin{cases} z' = \left(1 - \dfrac{\lambda'}{l_2}\right) \left\{ y_1 + p' \dfrac{m_2}{m_1} y_2 \right\} ; \\ z'' = \left(1 - \dfrac{\lambda''}{l_2}\right) \left\{ y_1 + p'' \dfrac{m_2}{m_1} y_2 \right\} ; \end{cases}$$

et en vertu des équations (79) :

$$(88)\ldots\ldots \quad \begin{cases} z' = \left(1 - \dfrac{\lambda'}{l_2}\right) L' \sin(k' t + \varepsilon') ; \\ z'' = \left(1 - \dfrac{\lambda''}{l_2}\right) L'' \sin(k'' t + \varepsilon'') . \end{cases}$$

Ainsi, quelles que soient les conditions initiales du mouvement, il y a, sur la droite $\overline{m_1 m_2}$, deux points qui jouissent de la propriété de faire des oscillations isochrones.

Comme p' est toujours positif, le point correspondant sera situé entre m_1 et m_2; p'' étant au contraire toujours négatif, le point correspondant sera situé au delà du point m_2 ou en deça du point m_1, selon que $-p''\frac{m_2}{m_1}$ sera plus grand ou plus petit que l'unité. Lorsque, par suite des conditions initiales du problème, L'' et par conséquent H'' est nul, le point μ correspondant à p'' restera constamment sur la verticale; alors les deux points m_1, m_2 exécuteront, dans le même temps, des oscillations isochrones et se trouveront, simultanément, d'un même côté de la verticale à cause que p' est positif. Si au contraire L' ou bien H' est nul, le point μ correspondant à p' ne sortira pas de la verticale et les deux points m_1, m_2 exécuteront des oscillations isochrones; mais, à cause que p'' est négatif, ces deux points se trouveront toujours de côtés opposés de la verticale.

§ IV.

Mouvements vibratoires d'un fil rectiligne flexible et inextensible qui porte diverses masses réparties sur les différents points de sa longueur.

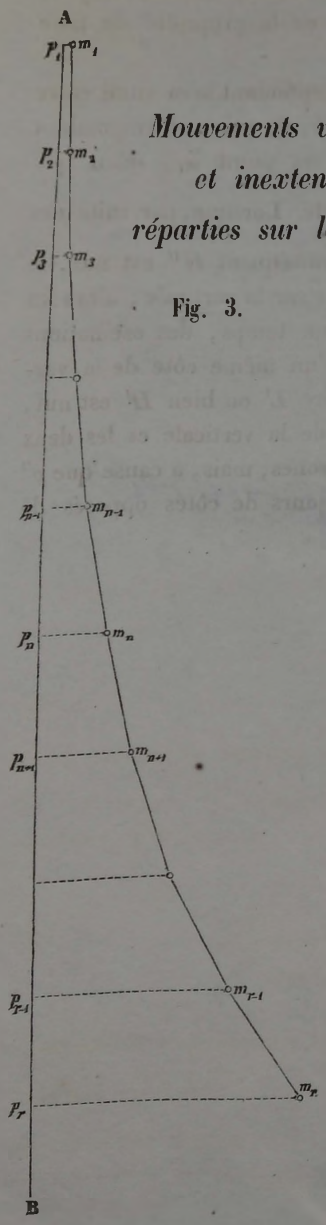


Fig. 3.

12. Soient : m_1, m_2, $m_3 \ldots$; $m_n \ldots$; m_r, les masses réparties sur les différents points du fil (fig. 3), m_1 et m_r étant les masses placées aux deux extrémités ; l_1, $l_2 \ldots$; $l_{n-1} \ldots$; $l_{r-1} \ldots$ les distances respectives entre les masses m_1 et m_2 ; m_{n-1} et m_n ; m_{r-1} et m_r, ou, en d'autres termes, les longueurs des divers éléments du fil. T_1, $T_2 \ldots$; $T_{n-1} \ldots$; T_{r-1} les tensions correspondantes ; y_1, $y_2 \ldots$; $y_n \ldots$; $y_r \ldots$ les ordonnées des points m_1, $m_2 \ldots$; $m_n \ldots$ $m_r \ldots$ perpendiculaires à la droite $\overline{AB}$ que l'on suppose être la position d'équilibre stable du fil. On admettra que le mouvement de chaque point, perpendiculairement à $\overline{AB}$, a lieu dans le plan de la figure ; on verra que la solution du problème s'étend facilement au cas où le mouvement de chaque point se fait dans un plan perpendiculaire à l'axe $\overline{AB}$; nous ferons abstraction de la masse du fil ; par la suite on montrera comment on en tient compte.

Cela posé, si l'on considère la première masse m_1, elle sera sollicitée par la tension T_1, dont la composante, perpendiculaire à $\overline{AB}$, sera $T_1 \frac{y_2 - y_1}{l_1}$. La masse m_r

placée à l'autre extrémité, sera sollicitée par la tension T_{r-1}, dont la composante, suivant l'ordonnée y_r, est $-T_{r-1}\frac{y_r-y_{r-1}}{l_{r-1}}$. La masse m_n, placée en un point intermédiaire, sera sollicitée, dans le sens de l'ordonnée, par une force égale à

$$T_n\frac{y_{n+1}-y_n}{l_n}-T_{n-1}\frac{y_n-y_{n-1}}{l_{n-1}}.$$

Ainsi les équations du mouvement de ces différentes masses seront

$$(89)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=T_1\dfrac{y_2-y_1}{l_1}\ ; \\ m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}=T_2\dfrac{y_3-y_2}{l_2}-T_1\dfrac{y_2-y_1}{l_1}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ m_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}=T_n\dfrac{y_{n+1}-y_n}{l_n}-T_{n-1}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{l_{n-1}}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ m_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}=-T_{r-1}\dfrac{y_r-y_{r-1}}{l_{r-1}}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les deuxièmes membres de ces équations peuvent s'ordonner de la manière suivante :

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=-\dfrac{T_1}{l_1}y_1+\dfrac{T_1}{l_1}y_2\ ; \\ m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2}=\dfrac{T_1}{l_1}y_1-\left(\dfrac{T_1}{l_1}+\dfrac{T_2}{l_2}\right)y_2+\dfrac{T_2}{l_2}y_3\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ m_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}=\dfrac{T_{n-1}}{l_{n-1}}y_{n-1}-\left(\dfrac{T_{n-1}}{l_{n-1}}+\dfrac{T_n}{l_n}\right)y_n+\dfrac{T_n}{l_n}y_{n+1}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ m_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}=\dfrac{T_{r-1}}{l_{r-1}}y_{r-1}-\dfrac{T_{r-1}}{l_{r-1}}y_r\ . \end{array}\right.$$

Sommons ces équations, après les avoir multipliées respectivement par p_1, $p_2 \ldots$; $p_n \ldots$; $p_r \ldots$, on aura :

$$(91) \ldots \begin{cases} m_1 p_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 p_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \ldots + m_n p_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} \ldots + m_r p_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} \\ = y_1 \left(-p_1 \frac{T_1}{l_1} + p_2 \frac{T_1}{l_1} \right) + y_2 \left[p_1 \frac{T_1}{l_1} - p_2 \left(\frac{T_1}{l_1} + \frac{T_2}{l_2} \right) + p_3 \frac{T_2}{l_2} \right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_n \left[p_{n-1} \frac{T_{n-1}}{l_{n-1}} - p_n \left(\frac{T_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{T_n}{l_n} \right) + p_{n+1} \frac{T_n}{l_n} \right] \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + y_r \left(p_{r-1} \frac{T_{r-1}}{l_{r-1}} - p_r \frac{T_{r-1}}{l_{r-1}} \right) ; \end{cases}$$

les coefficients p_1, p_2, p_3 etc. étant arbitraires, on les déterminera par les conditions suivantes :

$$(92) \ldots \begin{cases} k^2 m_1 p_1 + (p_2 - p_1) \frac{T_1}{l_1} = 0 ; \\ k^2 m_2 p_2 + \left\{ p_1 \frac{T_1}{l_1} - p_2 \left(\frac{T_1}{l_1} + \frac{T_2}{l_2} \right) + p_3 \frac{T_2}{l_2} \right\} = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^2 m_n p_n + \left\{ p_{n-1} \frac{T_{n-1}}{l_{n-1}} - p_n \left(\frac{T_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{T_n}{l_n} \right) + p_{n+1} \frac{T_n}{l_n} \right\} = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^2 m_r p_r + (p_{r-1} - p_r) \frac{T_{r-1}}{l_{r-1}} = 0 , \end{cases}$$

où k^2 représente une quantité constante

13. Les équations précédentes sont au nombre de r et l'on a $r+1$ constantes a déterminer, savoir p_1, $p_2 \ldots p_n \ldots p_r$ et k^2. Mais on observera qu'il suffit de connaître k^2 et les rapports $\frac{p_2}{p_1} \ldots \frac{p_n}{p_1} \ldots \frac{p_r}{p_1}$; par conséquent le nombre des équations est égal à celui des inconnues. En éliminant ces derniers rapports on aura une équation en k^2, que nous désignerons par

(93) .... $(K)=0$;

dans laquelle k^2 s'élèvera au degré r; ainsi l'on aura r valeurs différentes de k^2 que nous désignerons par k'^2; k''^2; $k^{(\lambda)2}$ .... ; chacune de ces valeurs en donnera de correspondantes de $\frac{p_2}{p_1} \ldots \frac{p_n}{p_1} \ldots \frac{p_r}{p_1}$, que nous accentuerons de la même manière, pour les distinguer les unes des autres. Cela posé, l'équation (91) fournira r équations différentes en y substituant successivement, au lieu de p_1, $p_2 \ldots p_n$ etc., leurs valeurs p_1', $p_2' \ldots$ p_1'', $p_2'' \ldots p_1^{(\lambda)}$, $p_2^{(\lambda)} \ldots$ etc.

Ainsi, en faisant, par abréviation,

$$(94) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} u' = m_1 p_1' y_1 + m_2 p_2' y_2 \ldots + m_n p_n' y_n \ldots\ldots \\ \qquad + m_r p_r' y_r = \mathrm{S}.mp'y ; \\ u^{(\lambda)} = m_1 p_1^{(\lambda)} y_1 + m_2 p_2^{(\lambda)} y_2 \ldots + m_n p_n^{(\lambda)} y_n \ldots\ldots \\ \qquad + m_r p_r^{(\lambda)} y_r = \mathrm{S}.mp^{(\lambda)} y ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{array} \right.$$

où $\mathrm{S}.$ indique la somme des termes analogues, relatifs aux différentes masses en mouvement, l'on aura les r équations suivantes :

$$(95) \ldots\ldots \frac{d^2u'}{dt^2} + k^2 u' = 0 \ \ldots\ldots \ \frac{d^2u^{(\lambda)}}{dt^2} + k^2 u^{(\lambda)} = 0 \ \ldots\ldots ;$$

d'où l'on déduit

$$(96) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} u' = \mathrm{S}.mp'y = L' \sin\{k't + \varepsilon'\} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ u^{(\lambda)} = \mathrm{S}.mp^{(\lambda)} y = L^{(\lambda)} \sin\{k^{(\lambda)} t + \varepsilon^{(\lambda)}\} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{array} \right.$$

De ces équations on déduira, pour y_1, y_2 ..... y_n ..... y_r ..... des expressions de la forme

$$(97)\ \cdots\cdots\begin{cases} y_1 = H_1' \sin(k't+\varepsilon') + H_1'' \sin(k''t+\varepsilon'') + \cdots\cdots ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ y_n = H_n' \sin(k't+\varepsilon') + H_n'' \sin(k''t+\varepsilon'') + \cdots\cdots ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ y_r = H_r' \sin(k't+\varepsilon') + H_r'' \sin(k''t+\varepsilon'') + \cdots\cdots \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (90) du mouvement, en observant ensuite que, dans chaque équation, les coefficients respectifs de $\sin(k't+\varepsilon')$, $\sin(k''t+\varepsilon'')$, etc. doivent être séparément nuls, et en comparant les résultats ainsi obtenus aux équations (92), il sera facile de voir que les valeurs de $H_1' \ldots H_n'$; $H_1'' \ldots H_n''$, etc. qui satisfont aux équations (97) sont respectivement égales à

$$(98)\ \cdots\cdots\begin{cases} H_1' = p_1' \ ; \qquad H_1'' = p_1'' \cdots\cdots ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ H_n' = p_n' \ ; \qquad H_n'' = p_n'' \cdots\cdots ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Par conséquent les valeurs de $y_1 \ldots$; $y_n \ldots$; $y_r \ldots$ seront données par les équations

$$(99)\ \cdots\cdots\begin{cases} y_1 = p_1' \sin(k't+\varepsilon') + p_1'' \sin(k''t+\varepsilon'') + \cdots\cdots \\ \quad = \sum_{(1)}^{(r)} . p_1 \sin(kt+\varepsilon) \ ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ y_n = p_n' \sin(k't+\varepsilon') + p_n'' \sin(k''t+\varepsilon'') + \cdots\cdots \\ \quad = \sum_{(1)}^{(r)} . p_n \sin(kt+\varepsilon) \ ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ y_r = p_r' \sin(k't+\varepsilon') + p_r'' \sin(k''t+\varepsilon'') + \cdots\cdots \\ \quad = \sum_{(1)}^{(r)} . p_r \sin(kt+\varepsilon) \ ; \end{cases}$$

où $\sum_{(1)}^{(r)}$ indique la somme des termes relatifs aux diverses valeurs de p, qui composent chacune des expressions de $y_1 \ldots ; y_n \ldots ; y_r \ldots$.

En substituant ces valeurs dans les équations (96) et en partant du principe que les coefficients de

$$\sin(k't+\varepsilon') \ldots\ldots ; \qquad \sin(k''t+\varepsilon'') \text{ etc.},$$

doivent être respectivement nuls, on conclura, comme dans le § I, que, λ et θ étant deux indices différents l'un de l'autre, on a en général

$$(100) \ldots \quad m_1 p_1^{2(\lambda)} + m_2 p_2^{2(\lambda)} \ldots + m_n p_n^{2(\lambda)} \ldots + m_r p_r^{2(\lambda)} = L^{(\lambda)} ;$$

$$(101) \ldots \quad m_1 p_1^{(\lambda)} p_1^{(\theta)} + m_2 p_2^{(\lambda)} p_2^{(\theta)} \ldots\ldots + m_n p_n^{(\lambda)} p_n^{(\theta)} \ldots\ldots + m_r p_r^{(\lambda)} p_r^{(\theta)} = 0 .$$

Ainsi les équations (96) deviendront, par la substitution de la valeur de L,

$$(102) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}.mp'y = \mathrm{S}.mp'^2 . \sin(k't+\varepsilon') \\ \qquad\qquad = \mathrm{S}.mp'^2 \left\{ \sin k't . \cos\varepsilon' + \cos k't . \sin\varepsilon' \right\} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \mathrm{S}.mp^{(\lambda)}y = \mathrm{S}.mp^{2(\lambda)} . \sin\left(k^{(\lambda)}t+\varepsilon^{(\lambda)}\right) \\ \qquad\qquad = \mathrm{S}.mp^{2(\lambda)} \left\{ \sin k^{(\lambda)}t . \cos\varepsilon^{(\lambda)} + \cos kt^{(\lambda)} . \sin\varepsilon^{(\lambda)} \right\} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

et en général

$$(103) \ldots \quad \mathrm{S}.mpy = \mathrm{S}.mp^2 \sin(kt+\varepsilon) = \mathrm{S}.mp^2 (\sin kt . \cos\varepsilon + \cos kt . \sin\varepsilon) ;$$

où p, k, ε indiquent une valeur quelconque de ces quantités.

Soient β_1, $\beta_2 \ldots$; $\beta_n \ldots$; β_r ; $\overline{\beta_1}$, $\overline{\beta_2} \ldots$; $\overline{\beta_n} \ldots$; $\overline{\beta_r}$; ou, en général, β ; $\overline{\beta}$ les ordonnées et les vîtesses initiales des divers points du système que nous considérons, l'on déduira de l'équation (103) et de sa différentielle

$$(104) \ldots\ldots \begin{cases} \mathcal{S}.mp\beta = \mathcal{S}.mp^2 \sin\varepsilon \ ; \\ \mathcal{S}.mp\overline{\beta} = k.\mathcal{S}.mp \cos\varepsilon \ ; \end{cases}$$

d'où l'on déduit, à cause que ε est le même pour toutes les masses en mouvement,

$$(105) \ldots\ldots \quad \sin\varepsilon = \frac{\mathcal{S}.mp\beta}{\mathcal{S}.mp^2} \ ; \quad \cos\varepsilon = \frac{\mathcal{S}.mp\overline{\beta}}{k.\mathcal{S}.mp^2} \ .$$

Nous avons ainsi deux nouvelles équations qui servent à déterminer les constantes introduites dans l'intégration des équations du mouvement. Or le nombre des qualités constantes k, ε, p_1, $p_2 \ldots$; $p_n \ldots$; p_r est de $r+2$; nous avions déjà les r équations (92); les deux nouvelles équations obtenues (104) complètent ainsi le nombre de celles nécessaires pour déterminer toutes les constantes introduites dans la solution du problème, et, comme l'équation (93) fournit r valeurs de k^2, à chacune de ces valeurs, il y en aura de correspondantes de ε aussi bien que de p_1, $p_2 \ldots$; $p_n \ldots$; p_r.

L'on voit donc que la solution du problème est complète. Les équations (101) nous démontrent que toutes les valeurs de p_1, $p_2 \ldots$, etc. sont réelles. En effet, si l'équation (93) donnait deux racines imaginaires, on aurait, d'après les équations (92), des valeurs de p_1, $p_2 \ldots$ correspondantes imaginaires, et comme les deux valeurs de k^2 seraient de la forme $\varphi \pm \psi.\sqrt{-1}$, il en résulterait, que, prenant, dans l'équation (101) $p^{(\lambda)}$, correspondant à la racine $\varphi + \psi.\sqrt{-1}$, et $p^{(\theta)}$ à la racine $\varphi - \psi.\sqrt{-1}$, chacun des termes de ladite équation (101) se composerait d'un produit de la forme

$$(P+Q.\sqrt{-1})(P-Q.\sqrt{-1}) = P^2+Q^2 \ .$$

Ainsi, le premier membre de cette équation étant formé d'une somme de quarrés, cette somme ne pourrait être évidemment nulle; d'où l'on conclut que k^2, et par suite $p_1 \ldots$; p_n, ne peuvent avoir de valeurs imaginaires, ce qui, du reste, confirme ce que nous avons déjà démontré dans le § I.

14. Nous avons supposé que le mouvement du système avait lieu dans un plan; mais il est facile de généraliser le problème. Pour cela nous prendrons pour axe des x la droite AB (fig. 3), qui représente la position d'équilibre du système lineaire, et nous considérerons deux autres axes des z et des y perpendiculaires entr'eux, et à celui des x. Nous admettrons que le mouvement de chaque point a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe des z; cela étant, les composantes de la tension T_n suivant les axes des z et des y, seront

$$T_n \frac{z_{n+1} - z_n}{l_n} \; ; \qquad T_n \frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} \; ;$$

ainsi les équations du mouvement du point m_n deviendront

$$(106) \ldots \begin{cases} m_n \dfrac{d^2 z_n}{dt^2} = T_n \dfrac{z_{n+1} - z_n}{l_n} - T_{n-1} \dfrac{z_n - z_{n-1}}{l_{n-1}} \; ; \\ m_n \dfrac{d^2 y_n}{dt^2} = T_n \dfrac{y_{n+1} - y_n}{l_n} - T_{n-1} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1}} \; . \end{cases}$$

On voit, par ce résultat, que les mouvements, dans le sens des x et celui des y, sont indépendants l'un de l'autre. Ainsi l'on pourra appliquer à la détermination des diverses valeurs de z toute l'analyse que nous venons de développer. Nous observerons que ces deux mouvements sont toutefois liés entr'eux par les équations (92) qui montrent que les valeurs de k; $\frac{p_2}{p_1}$; $\frac{p_3}{p_1} \ldots$; $\frac{p_n}{p_1}$; etc. sont les mêmes pour les deux systèmes de variables z et y.

Seulement on aura deux systèmes de valeurs différents de p_1 et ε. En désignant par q_1 et ω les valeurs de p_1 et ε qui se rapportent à z, on aura, pour déterminer q_1 et ω_1, les équations suivantes, qui se déduisent des équations (104), et dans lesquelles γ et $\overline{\gamma}$ indiquent les valeurs initiales de z et $\frac{dz}{dt}$:

$$(107) \ldots \quad q_1 \sin\omega = \frac{\mathrm{S}.m\frac{p}{p_1}\gamma}{\mathrm{S}.m\frac{p^2}{p_1^2}} \; ; \qquad q_1 \cos\omega = \frac{\mathrm{S}.m\frac{p}{p_1}\overline{\gamma}}{k.\mathrm{S}.m\frac{p^2}{p_1^2}} \; .$$

Les équations analogues (105) peuvent aussi s'écrire de cette manière :

$$(108)\ \ldots\ p_1 \sin\varepsilon = \frac{S.m\frac{p}{p_1}\beta}{S.m\frac{p^2}{p_1^2}}\ ; \qquad p_1\cos\varepsilon = \frac{S.m\frac{p}{p_1}\overline{\beta}}{k.S.m\frac{p^2}{p_1^2}}\ .$$

Ces équations jointes aux r, équations (92), serviront à déterminer les $r+4$ quantités constantes k, ε, ω, p_1, $q_1 \ldots$, $\frac{p_n}{p_1} \ldots$; et, comme k a r valeurs différentes, il y aura autant de valeurs correspondantes de chacune des autres constantes. Les expressions de y_n et z_n seront pareillement représentées par les formules suivantes:

$$(109)\ \ldots\ \begin{cases} y_n = \sum_{(1)}^{(r)} . p_1 \frac{p_n}{p_1} \sin(kt+\varepsilon)\ ; \\ z_n = \sum_{(1)}^{(r)} . q_1 \frac{p_n}{p_1} \sin(kt+\omega)\ . \end{cases}$$

Si le fil qui porte les différentes masses était extensible, il faudrait également tenir compte des vibrations longitudinales. Dans un autre § nous examinerons cette question, et nous verrons que les mouvements longitudinaux sont indépendants des mouvements transversaux.

15. Afin de montrer comment les formules précédentes s'appliquent au cas où le système des points en mouvement est continu ou composé de parties continues, il est nécessaire de les présenter sous une autre forme. Pour cela exprimons par Δ et Δ^2 les différences 1.ère et 2.ème, on aura :

$$(110)\ \ldots\ \begin{cases} p_{n+1} - p_n = \Delta p_n\ ; \\ p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1} = \Delta^2 p_{n-1}\ ; \\ \frac{T_n}{l_n} - \frac{T_{n-1}}{l_{n-1}} = \Delta \frac{T_{n-1}}{l_{n-1}}\ . \end{cases}$$

En introduisant cette nouvelle notation, nous aurons, pour représenter le mouvement, l'ensemble des équations suivantes, dont les trois premières se déduisent des équations (92) et les autres ne sont que la reproduction de celles que nous avons déjà écrites :

$$
(\text{III})\ldots\quad
\begin{cases}
(\text{a})\ldots & k^2 m_n p_n + \Delta\dfrac{T_{n-1}}{l_{n-1}}\Delta p_n + \dfrac{T_{n-1}}{l_{n-1}}\Delta^2 p_{n-1} = 0\ ; \\[2ex]
(\text{b})\ldots & k^2 m_1 p_1 + \dfrac{T_1}{l_1}\Delta p_1 = 0\ ; \\[2ex]
(\text{c})\ldots & k^2 m_r p_r - \dfrac{T_{r-1}}{l_{r-1}}\Delta p_{r-1} = 0\ ; \\[2ex]
(\text{d})\ldots & y_n = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot p_n \sin(kt+\varepsilon)\ ; \qquad z_n = \sum_{(1)}^{(r)} \cdot q_1 \dfrac{p_n}{p_1}\sin(kt+\omega)\ ; \\[2ex]
(\text{e})\ldots & \sin\varepsilon = \dfrac{\mathrm{S}\cdot mp\beta}{\mathrm{S}\cdot mp^2}\ ; \qquad \cos\varepsilon = \dfrac{\mathrm{S}\cdot mp\overline{\beta}}{k\cdot\mathrm{S}\cdot mp^2}\ ; \\[2ex]
(\text{f})\ldots & \sin\omega = \dfrac{\mathrm{S}\cdot m\dfrac{p}{p_1}\gamma}{q_1\cdot\mathrm{S}\cdot m\dfrac{p^2}{p_1^2}}\ ; \qquad \cos\omega = \dfrac{\mathrm{S}\cdot m\dfrac{p}{p_1}\overline{\gamma}}{kq_1\cdot\mathrm{S}\cdot m\dfrac{p^2}{p_1^2}}\ .
\end{cases}
$$

Les équations (b) et (c) sont les équations aux limites. Telles sont les équations que nous allons appliquer à la solution de plusieurs problèmes. Comme le mouvement, dans le sens des z, suit les mêmes lois que celui dans le sens des y, nous nous bornerons, dans les exemples qui suivent, à examiner ce dernier.

Premier Problême.

Déterminer les lois du mouvement lorsque les masses $m_1 \ldots\ldots$; $m_n \ldots\ldots$; m_r ***sont pesantes; la droite*** AB (fig. 3) ***est supposée verticale, et le fil fixé par son extrémité supérieure*** A.

16. Désignons par g la gravité; il est clair que la tension de l'élément du fil $\overline{m_{n-1}\,m_n}$ sera égale à la somme des poids des masses comprise depuis m_n jusqu'à l'extrémité inférieure, ainsi l'on aura

$$T_{n-1} = \sum_{n-1}^{r} \cdot gm\ ,$$

et pareillement

$$T_n = \sum_{n}^{r} \cdot gm \ldots\ldots ; \qquad T_{r-1} = gm_r\ ;$$

l'on aura aussi

$$\Delta\frac{T_{n-1}}{l_{n-1}}=g\left(\frac{\overset{r}{\underset{n}{\mathrm{S}}}.m}{l_n}-\frac{\overset{r}{\underset{n-1}{\mathrm{S}}}.m}{l_{n-1}}\right).$$

Le point m_1 étant fixe, c'est comme si la masse correspondante était infinie; ainsi les trois équations de conditions (a), (b), (c) ... (111), deviendront :

$$(112)\ldots\begin{cases}k^2 m_n p_n+g\left(\dfrac{\overset{r}{\underset{n}{\mathrm{S}}}.m}{l_n}-\dfrac{\overset{r}{\underset{n-1}{\mathrm{S}}}.m}{l_{n-1}}\right)\Delta p_n+g.\overset{r}{\underset{n}{\mathrm{S}}}.m.\Delta^2 p_{n-1}=0\ ;\\ p_1=0\ ; \qquad k^2 p_r-\dfrac{g}{l_{r-1}}\Delta p_{r-1}=0\ ;\end{cases}$$

si les masses $m_2 \ldots\ldots m_n \ldots\ldots m_r$, ainsi que les éléments $l_1 \ldots\ldots l_n \ldots\ldots l_{r-1}$, étaient respectivement égaux entr'eux, les équations (111) deviendraient

$$(113)\ldots\ldots\begin{cases}y_n=\Sigma.p_n\sin(kt+\varepsilon)\ ;\\ \sin\varepsilon=\dfrac{\mathrm{S}.p\beta}{\mathrm{S}.p^2}\ ; \qquad \cos\varepsilon=\dfrac{1}{k}.\dfrac{\mathrm{S}.p\overline{\beta}}{\mathrm{S}.p^2}\ ;\\ k^2 p_n-\dfrac{g}{l}\Delta p_n+\dfrac{g(r-n+1)}{l}\Delta^2 p_{n-1}=0\ ;\\ p_1=0\ ; \qquad k^2 p_r-\dfrac{g}{l}\Delta p_{r-1}=0\ .\end{cases}$$

Deuxième Problème.

Déterminer les oscillations d'un fil pesant fixé par son extrémité supérieure, et portant à l'autre extrémité un poids gm_r.

17. Nous désignerons par r la longueur du fil, x la distance d'un point m_n du fil à l'origine A (fig. 3), ωdx la masse d'un élément dx du fil. La valeur de p, correspondante au point m_n dans les équations (111), sera une fonction de x que nous représenterons par X; on pourra prendre $l_1=l_2\ldots=l_n=l_{r-1}=dx$; les différences finies deviendront des différentielles, et les sommes S. se changeront en intégrales pour la partie continue du fil. On aura évidemment :

$$T_1 = g\left\{m_r + \int_0^r \omega\, dx\right\};$$

$$T_{r-1} = g m_r\,; \qquad T_{n-1} = g\left\{m_r + \int_x^r \omega\, dx\right\}.$$

Comme le point A est fixe, on en conclut que

$$p_1 = X_0 = 0\,.$$

Ainsi les équations (111), abstraction faite de celles qui se rapportent à z, deviendront, en substituant $\omega\, dx$ à m_n,

$$(114)\,.\quad \left\{\begin{array}{ll}
(\mathfrak{a})\ldots & k^2\omega X - g\omega\dfrac{dX}{dx} + g\left\{m_r + \displaystyle\int_x^r \omega\, dx\right\}\dfrac{d^2X}{dx^2} = 0\,; \\[2ex]
(\mathfrak{b})\ldots & X_0 = 0\,; \\[2ex]
(\mathfrak{c})\ldots & k^2 X_r - g\dfrac{dX_r}{dx} = 0\,; \\[2ex]
(\mathfrak{d})\ldots & y = \Sigma . X \sin(kt + \varepsilon)\,; \quad (*) \\[2ex]
(\mathfrak{e})\ldots & \left\{\begin{array}{l}
\sin\varepsilon = \dfrac{\displaystyle\int_0^r \omega X\beta\, dx + m_r X_r \beta_r}{\displaystyle\int_0^r \omega X^2 dx + m_r X_r^2}\,; \\[2ex]
\cos\varepsilon = \dfrac{\displaystyle\int_0^r \omega X\overline{\beta}\, dx + m_r X_r \overline{\beta}_r}{k\displaystyle\int_0^r \omega X^2 dx + m_r X_r^2}\,;
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

R. Università di Torino
ISTITUTO DI FISICA

ω sera, en général, une fonction de x; mais si le fil était homogène et de section uniforme, ω serait constant.

(*) Cette somme s'étend à toutes les valeurs de k.

L'expression de X se déduira de l'équation différentielle (a) du deuxième ordre, dont les constantes seront déterminées par les deux équations (b), (c) qui, avec les équations (e), sont en nombre suffisant pour la détermination de k et de ε.

Nous ferons quelques applications des formules précédentes.

18. Supposons en premier lieu que la masse du fil soit assez petite pour pouvoir être négligée par rapport à la masse m_r; cela étant, on posera $\omega = 0$ dans les équations (114) qui donneront

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \; ; \qquad X_0 = 0 \; ; \qquad k^2 X_r - g\frac{dX_r}{dx} = 0 \; .$$

On déduit de la première de ces équations

$$X = A + Bx \; ,$$

A et B étant deux constantes, et l'on conclut des deux autres

$$A = 0 \; ; \qquad X_r = Br \; ; \qquad k^2 = \frac{g}{r} \; .$$

Les équations (d) et (e) donneront

$$y = Bx \sin\left(t.\sqrt{\frac{g}{r}} + \varepsilon\right) \; ; \qquad \sin\varepsilon = \frac{\beta_r}{Br} \; ; \qquad \cos\varepsilon = \frac{1}{k}.\frac{\overline{\beta_r}}{Br} \; ;$$

d'où l'on conclut

$$(115)\ldots \begin{cases} y = \dfrac{x}{r}\left\{\beta_r \cos.\, t\sqrt{\dfrac{g}{r}} + \overline{\beta_r}.\sqrt{\dfrac{r}{g}}\sin.\, t\sqrt{\dfrac{g}{r}}\right\} \; ; \\ y_r = \beta_r \cos.\, t\sqrt{\dfrac{g}{r}} + \overline{\beta_r}.\sqrt{\dfrac{r}{g}}\sin.\, t\sqrt{\dfrac{g}{r}} \; . \end{cases}$$

L'avant dernière de ces équations nous montre que, pendant toute la durée du mouvement, le fil est tendu en ligne droite; la dernière équation est celle même du pendule simple de longueur égale à r.

19. Actuellement tenons compte du poids du fil que nous supposerons homogène, mais d'un poids assez petit, par rapport à celui de la masse m_r, pour qu'on puisse considérer la tension T comme constante en tous ses points et égale au poids gm_r: l'on observera que le terme

$-g\omega\frac{dX}{dx}$ de l'équation (a) (114), correspondant au terme $\Delta\frac{T_{n-1}}{l_{n-1}}\Delta p_n$ de l'équation (a) (111), disparait dans l'hypothèse d'une tension constante. Avec ces données les équations (114) deviennent :

$$(116)\quad\left\{\begin{array}{l}
(\mathrm{A})\ \ldots\ k^2\omega X+g\,m_r\frac{d^2X}{dx^2}=0\ ;\\[2ex]
(\mathrm{B})\ \ldots\ X_0=0\ ;\\[2ex]
(\mathrm{C})\ \ldots\ k^2X_r-g\frac{dX_r}{dx}=0\ ;\\[2ex]
(\mathrm{D})\ \ldots\ y=\Sigma.X\sin(kt+\varepsilon)=\Sigma.X\left\{\cos\varepsilon\sin kt+\sin\varepsilon\cos kt\right\}\ ;\\[2ex]
(\mathrm{E})\ \ldots\left\{\begin{array}{l}
\sin\varepsilon=\dfrac{\omega\int_0^r X\beta\,dx+m_rX_r\beta_r}{\omega\int_0^r X^2\,dx+m_rX_r^2}\ ;\\[2ex]
\cos\varepsilon=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\omega\int_0^r X\overline{\beta}\,dx+m_rX_r\overline{\beta}_r}{\omega\int_0^r X^2\,dx+m_rX_r^2}\ .
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

L'équation (A), étant intégrée, donne

$$X=A\sin\left(xk.\sqrt{\frac{\omega}{g\,m_r}}+a\right),$$

où A et a sont deux constantes arbitraires.

En vertu de l'équation (B) on a $a=0$, et par conséquent

$$(117)\ \ldots\ldots\qquad X=A\sin.xk\sqrt{\frac{\omega}{g\,m_r}}\ .$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (C) il viendra

$$k\sin.rk\sqrt{\frac{\omega}{g\,m_r}}-\sqrt{\frac{\omega g}{m_r}}\cos.rk\sqrt{\frac{\omega}{g\,m_r}}=0\ ,$$

ou bien

$$(118) \ldots\ldots \quad rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}\,\text{tang.}\,rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}=\frac{\omega r}{m_r}\,.$$

Cette équation transcendante servira à déterminer les valeurs de k dont le nombre, comme on le voit, est infini. Mais observons que le second membre $\frac{\omega r}{m_r}$, qui exprime le rapport de la masse du fil à m_r, est une quantité très-petite, par conséquent l'on obtiendra la première valeur de k que nous désignerons par k', en considérant

$$\text{tang.}\,rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}$$

comme différant fort peu de son arc : ainsi l'on aura

$$r^2k'^2\frac{\omega}{gm_r}=\frac{\omega r}{m_r}\;;$$

ou bien

$$(119) \ldots\ldots\ldots \quad k'=\sqrt{\frac{g}{r}}\,,$$

qui sera la plus petite valeur de k. A mesure que k croîtra, la valeur de $\text{tang.}\,rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}$ devra diminuer de manière à ce que le produit

$$rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}\,\text{tang.}\,rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}$$

reste toujours le même et très-petit ; par conséquent l'arc $rk\sqrt{\frac{\omega}{gm_r}}$ devra différer très-peu d'un nombre entier i de demi-circonférences π. En affectant de l'indice (i) la valeur de k correspondante à i demi-circonférences, on pourra prendre

$$(120) \ldots\ldots\ldots \quad k^{(i)}=\frac{i\pi}{r}\cdot\sqrt{\frac{gm_r}{\omega}}=i\pi\cdot\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{m_r}{\omega r}}\,.$$

Au moyen de ces deux systèmes de valeurs de k (119) et (120), l'expression de l'ordonnée y deviendra, en accentuant de la même manière que k les valeurs de A et ε correspondantes,

$$(121)\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} y = A'\sin\dfrac{x}{r}\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}\sin\left(t.\sqrt{\dfrac{g}{r}}+\varepsilon'\right) \\ +\sum_{0}^{\infty}.\,A^{(i)}\sin\dfrac{x}{r}i\pi\sin\left(t\dfrac{i\pi}{r}.\sqrt{\dfrac{gm_r}{\omega}}+\varepsilon^{(i)}\right); \end{array}\right.$$

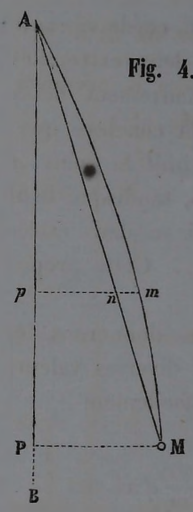


Fig. 4.

y_r étant l'ordonnée du point extrême, on aura, en faisant $x = r$,

$$(122)\ldots\quad y_r = A'\sin.\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}}\sin\left(t.\sqrt{\frac{g}{r}}+\varepsilon'\right).$$

Soient A (fig. 4) l'extrémité fixe du fil; M l'extrémité inférieure qui porte la masse m_r; $\overline{AmM}$ la position du fil correspondante au temps t; unissons par une droite les points A et M. Désignons par u l'ordonnée pn de la droite $\overline{AM}$ correspondante à l'abscisse $\overline{Ap} = x$; on aura

$$\overline{pm} = y\ ; \qquad \overline{pM} = y_r\ ; \qquad \overline{AP} = r\ ;$$

$$u = \frac{x}{r}y_r,$$

et la différence

$$(123)\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{pm} - \overline{pn} = \overline{nm} = y - u \\ = A'\sin\left(t.\sqrt{\dfrac{g}{r}}+\varepsilon'\right)\left\{\sin.\dfrac{x}{r}\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}} - \dfrac{x}{r}\sin.\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}\right\} \\ +\sum_{0}^{\infty}.\,A^{(i)}\sin\dfrac{x}{r}i\pi\sin\left(t.\dfrac{i\pi}{r}.\sqrt{\dfrac{gm_r}{\omega}}+\varepsilon^{(i)}\right). \end{array}\right.$$

Comme $\dfrac{\omega r}{m_r}$ est très-petit, on voit que le premier terme du second membre de cette équation pourra être négligé puisque

$$\sin.\frac{x}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} - \frac{x}{r}\sin.\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}}$$

est sensiblement nul; ainsi l'expression de $y - u$ se réduira à

$$(124)\quad \ldots\ldots\quad y-u=\sum_{0}^{\infty}.A^{(i)}\sin.\frac{x}{r}i\pi\sin.\left(t.\frac{i\pi}{r}.\sqrt{\frac{gm_r}{\omega}}+\varepsilon^{(i)}\right).$$

En même temps on aura

$$(125)\quad \ldots\ldots\quad u=\frac{x}{r}A'\sin.\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}}\sin.\left(t.\sqrt{\frac{g}{r}}+\varepsilon'\right).$$

On reconnaîtra, dans l'équation (124), l'équation de la corde vibrante tendue par une force égale au poids gm_r et dont les deux extrémités sont fixes, tandisque l'équation (125) représente le mouvement de la droite du pendule simple de longueur r; d'où l'on peut conclure que, dans le cas que nous examinons, la droite idéale qui unit le point A à la masse m_r se meut comme celle d'un pendule simple, tandisque le fil exécute, autour de cette droite, des vibrations comme si ses deux extrémités étaient fixes, sa tension étant égale au poids gm_r. Cette proposition sera développée ci-après.

20. Pour achever la solution de ce problème, nous donnerons les expressions de $A\sin\varepsilon$ et $A\cos\varepsilon$ correspondantes aux diverses valeurs de k. D'après les données précédentes, l'on obtiendra facilement

$$(126)\quad \begin{cases} A'\sin\varepsilon'=4.\dfrac{\beta_r m_r\sin.\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}+\omega\displaystyle\int_0^r\beta\sin.\frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}}dx'}{4m_r\sin^2.\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}+2r\omega-\omega r.\sqrt{\dfrac{m_r}{\omega r}}\sin.2\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}}; \\ A'\cos\varepsilon'=4.\sqrt{\dfrac{r}{g}}.\dfrac{\overline{\beta}_r m_r\sin.\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}+\omega\displaystyle\int_0^r\overline{\beta}\sin.\frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}}dx'}{4m_r\sin^2.\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}+2r\omega-\omega r.\sqrt{\dfrac{m_r}{\omega r}}\sin.2\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}}. \end{cases}$$

Si l'on observe que $\dfrac{\omega r}{m_r}$ est une quantité très-petite, on peut considérer comme nul le binome

$$2r\omega-\omega r.\sqrt{\frac{m_r}{\omega r}}\sin.2\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}};$$

et, pareillement, l'on pourra prendre l'arc $\sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}}$ au lieu de son *sinus*. Ainsi l'on obtiendra

$$(127)\ \ldots\ \begin{cases} A'\sin\varepsilon' = \beta_r \cdot \sqrt{\dfrac{m_r}{\omega r}} + \displaystyle\int_0^r \beta \sin . \frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r} \ ; \\ A'\cos\varepsilon' = \sqrt{\dfrac{r}{g}} \cdot \left\{ \overline{\beta}_r \cdot \sqrt{\dfrac{m_r}{\omega r}} + \displaystyle\int_0^r \overline{\beta} \sin . \frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r} \right\} . \end{cases}$$

On aura également

$$(128)\ \ldots\ \begin{cases} A^{(i)}\sin\varepsilon^{(i)} = 2\displaystyle\int_0^r \beta \sin . i\pi \frac{x'}{r} \cdot \frac{dx'}{r} \ ; \\ A^{(i)}\cos\varepsilon^{(i)} = \dfrac{2}{i\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{r}{g} \cdot \dfrac{\omega r}{m_r}} \cdot \displaystyle\int_0^r \overline{\beta} \sin . i\pi \frac{x'}{r} \cdot \frac{dx'}{r} \ . \end{cases}$$

Ainsi les expressions de y et de u deviendront

$$(129)\ \begin{cases} y = \dfrac{x}{r} \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta_r + \sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}} \cdot \displaystyle\int_0^r \beta \sin . \frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r} \right) \cos . t\sqrt{\dfrac{g}{r}} \\ + \sqrt{\dfrac{r}{g}} \cdot \left(\overline{\beta}_r + \sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}} \cdot \displaystyle\int_0^r \overline{\beta} \sin . \frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r} \right) \sin . t\sqrt{\dfrac{g}{r}} \end{array} \right\} \\ + 2 \cdot \overline{\sum_0^\infty} \cdot \sin . i\pi \dfrac{x}{r} \cdot \displaystyle\int_0^r \beta \sin . i\pi \frac{x'}{r} \cdot \frac{dx'}{r} \cos . i\pi t \cdot \sqrt{\dfrac{g}{r} \cdot \dfrac{m_r}{\omega r}} \\ + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{r}{g} \cdot \dfrac{\omega r}{m_r}} \cdot \overline{\sum_0^\infty} \cdot \dfrac{1}{i\pi} \sin . i\pi \dfrac{x}{r} \cdot \displaystyle\int_0^r \overline{\beta} \sin . i\pi \frac{x'}{r} \cdot \frac{dx'}{r} \sin . i\pi t \cdot \sqrt{\dfrac{g}{r} \cdot \dfrac{m_r}{\omega r}} \ ; \end{cases}$$

$$(130)\ \ldots\ u = \frac{x}{r} \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta_r + \sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}} \cdot \displaystyle\int_0^r \beta \sin . \frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r} \right) \cos . t\sqrt{\dfrac{g}{r}} \\ + \sqrt{\dfrac{r}{g}} \cdot \left(\overline{\beta}_r + \sqrt{\dfrac{\omega r}{m_r}} \cdot \displaystyle\int_0^r \overline{\beta} \sin . \frac{x'}{r}\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r} \right) \sin . t\sqrt{\dfrac{g}{r}} \end{array} \right\} .$$

Les expressions de y et de u pourront encore se simplifier dans le cas où β et $\overline{\beta}$ auront des valeurs très-petites ou peu différentes de celles de β_r et $\overline{\beta_r}$ correspondantes à l'extrémité du fil.

Alors il est clair que le terme

$$\sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \int_0^r \beta \sin . \frac{x'}{r} \sqrt{\frac{\omega r}{m_r}} \cdot \frac{dx'}{r}$$

et son analogue peuvent être négligés. Ainsi l'expression de u se réduira à

$$(131) \ldots\ldots \quad u = \frac{x}{r} \left\{ \beta_r \cos . t \sqrt{\frac{g}{r}} + \overline{\beta}_r . \sqrt{\frac{r}{g}} \sin . t \sqrt{\frac{g}{r}} \right\},$$

d'où l'on déduit

$$(132) \ldots\ldots \quad u_r = \beta_r \cos . t \sqrt{\frac{g}{r}} + \overline{\beta}_r . \sqrt{\frac{r}{g}} \sin . t \sqrt{\frac{g}{r}} ;$$

équation qui est celle du pendule simple de longueur r. On aura de même

$$(133) \ldots \begin{cases} y - u = 2 . \sum_1^\infty . \sin . i\pi \frac{x}{r} . \int_0^r \beta \sin . i\pi \frac{x'}{r} . \frac{dx'}{r} \cos . i\pi t \sqrt{\frac{g}{r} . \frac{m_r}{\omega r}} \\ + 2 . \sqrt{\frac{r}{g} . \frac{\omega r}{m_r}} . \sum_1^\infty . \sin . i\pi \frac{x}{r} . \int_0^r \overline{\beta} \sin . i\pi \frac{x'}{r} . \frac{dx'}{r} \cos . i\pi t \sqrt{\frac{g}{r} . \frac{m_r}{\omega r}} . \end{cases}$$

Cette équation est celle de la corde vibrante homogène fixée à ses deux extrémités.

Ces derniers résultats concordent avec ceux obtenus par Poisson dans le XVIIIème Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, *page* 488 (sauf quelques erreurs d'impression).

21. Pour compléter ce que nous avons à dire sur cette question, nous donnerons les formules relatives au cas général où la masse du fil n'est pas négligeable par rapport à celle de la masse m_r, en supposant toutefois que la tension du fil soit constante et égale au poids $m_r g$.

Voici les formules que l'on a dans ce cas. Par abréviation d'écriture nous ferons

$$(134)\ \ldots\ldots\ \sqrt{\frac{r}{g}\cdot\frac{\omega r}{m_r}} = b\ ,$$

ou bien, si l'on représente par P le poids de la masse m_r et par p celui de la masse du fil ωr,

$$b = \sqrt{\frac{r}{g}\cdot\frac{p}{P}}\ .$$

Cela posé l'équation (118) prendra la forme

$$(135)\ \ldots\ldots\ k\,\text{tang.}\,kb = \frac{g}{r}\,b\ .$$

En tenant compte de cette relation dans les expressions de $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$, les équations (116) donneront

$$(136)\ \ldots\ y = \Sigma.A\cos\varepsilon.\sin kb\frac{x}{r}\sin kt + \Sigma.A\sin\varepsilon.\sin kb\frac{x}{r}\cos kt\ ,$$

$$(137)\ \ldots\ \begin{cases} A\cos\varepsilon = \dfrac{4\beta_r m_r \sin kb + 4\omega\displaystyle\int_0^r \beta\sin kb\frac{x'}{r}\,dx'}{2\omega r + \dfrac{\omega r}{kb}\sin 2kb}\ ; \\ A\sin\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{4\overline{\beta}_r m_r \sin kb + 4\omega\displaystyle\int_0^r \overline{\beta}\sin kb\frac{x'}{r}\,dx'}{2\omega r + \dfrac{\omega r}{kb}\sin 2kb}\ . \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que ces formules reproduisent celles que nous avons déjà obtenues dans le cas où m_r est très-grand par rapport à ωr.

Troisième Problème.

Déterminer les oscillations d'un fil pesant, composé de deux parties hétérogènes, fixé par son extrémité supérieure, portant à l'extrémité inférieure une masse m_2, et, au point de jonction de ses deux parties, une autre masse m_1 (fig. 5).

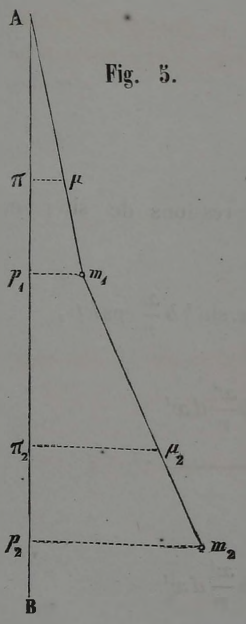


Fig. 5.

22. Soient les dénominations suivantes :

l_1, l_2 longueurs des fils $\overline{Am_1}$, $\overline{m_1m_2}$;

$r = l_1 + l_2$ longueur totale du fil $\overline{Am_1m_2}$;

$\omega_1 dx$, $\omega_2 dx$, masses élémentaires correspondantes à chacun des fils $\overline{Am_1}$, $\overline{m_1m_2}$;

y_1, y_2 ordonnées des points μ_1 et μ_2 pris sur chacun des fils ;

$y_1^{(0)}$, $y_1^{(1)}$; $y_2^{(1)}$, $y_2^{(2)}$ valeurs de y_1 et y_2 correspondantes aux points A, m_1, m_2 ;

g gravité ;

X_1, X_2 valeurs de p [voyez les équat.s (92)] relatives aux deux portions de fil ;

$X_1^{(0)}$, $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$ valeurs de X_1 et X_2 correspondantes aux points A_1, m_1, m_2.

Les équations (112) et (113) donneront, pour la première portion de fil $\overline{Am_1}$:

$$(138) \quad \ldots \quad y_1 = \Sigma . X_1 \sin(kt + \varepsilon) \; ;$$

$$(139) \quad \ldots \quad k^2 \omega_1 X_1 - g\omega_1 \frac{dX_1}{dx} + g\left\{m_1 + m_2 + \int_{l_1}^{r} \omega_2 dx + \int_{x}^{l} \omega_1 dx\right\} \frac{d^2X_1}{dx^2} = 0 \; ;$$

et pour la deuxième portion de fil $\overline{m_1m_2}$:

$$(140) \quad \ldots\ldots \qquad y_2 = \Sigma . X_2 \sin(kt + \varepsilon) \; ;$$

$$(141) \quad \ldots\ldots \quad k^2 \omega_2 X_2 - g\omega_2 \frac{dX_2}{dx} + g\left\{m_2 + \int_{x}^{r} \omega_2 dx\right\} \frac{d^2X_2}{dx^2} = 0 \; .$$

Pour le point A nous aurons :

$$(142) \ldots\ldots\ldots \qquad X_1^{(0)} = 0 \ ;$$

pour le point m_2 :

$$(143) \ldots\ldots\ldots \qquad k^2 X_2^{(2)} - g \frac{dX_2^{(2)}}{dx} = 0 \ .$$

Pour le point m_1 l'on devra avoir, pendant toute la durée du mouvement, $\gamma_1^{(1)} = \gamma_2^{(1)}$, et par conséquent

$$(144) \ldots\ldots\ldots \qquad X_1^{(1)} = X_2^{(1)} \ .$$

De plus l'équation générale (92), en y faisant

$$m_n = m_1 \ , \qquad p_n = X_1^{(1)} = X_2^{(2)} \ ,$$

$$T_{n-1} = (m_1 + m_2) g + g \cdot \int_{l_1}^{r} \omega_2 \, dx \ ,$$

$$T_n = m_2 g + g \cdot \int_{l_1}^{r} \omega_2 \, dx \ ,$$

$$l_{n-1} = l_n = dx \ ,$$

donnera pour le point m_1 :

$$(145) \ldots\ldots \quad k^2 m_1 X_1^{(1)} - g \left(m_1 + m_2 + \int_{l_1}^{r} \omega_2 \, dx \right) \frac{dX_1^{(1)}}{dx}$$

$$+ g \left(m_2 + \int_{l_1}^{r} \omega_2 \, dx \right) \frac{dX_2^{(1)}}{dx} = 0 \ .$$

Enfin les équations (105) deviendront

$$(146)\quad \begin{cases} \sin\varepsilon = \dfrac{m_1 X_1^{(1)}\beta_1^{(1)} + m_2 X_2^{(2)}\beta_2^{(2)} + \int_0^{l_1}\omega_1\beta_1 X_1\,dx + \int_{l_1}^{r}\omega_2\beta_2 X_2\,dx}{m_1 (X_1^{(1)})^2 + m_2 (X_2^{(2)})^2 + \int_0^{l_1}\omega_1 X_1^2\,dx + \int_{l_1}^{r}\omega_2 X_2^2\,dx}\,; \\ \cos\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot \dfrac{m_1 X_1^{(1)}\overline{\beta_1}^{(1)} + m_2 X_2^{(2)}\overline{\beta_2}^{(2)} + \int_0^{l_1}\omega_1\overline{\beta_1} X_1\,dx + \int_{l_1}^{r}\omega_2\overline{\beta_2} X_2\,dx}{m_1 (X_1^{(1)})^2 + m_2 (X_2^{(2)})^2 + \int_0^{l_1}\omega_1 X_1^2\,dx + \int_{l_1}^{r}\omega_2 X_2^2\,dx}\,. \end{cases}$$

Les équations précédentes contiennent la solution complète du problème proposé. Le nombre des constantes à déterminer est de six, savoir: k, ε et quatre autres constantes provenant de l'intégration des deux équations différentielles du 2ème ordre (139) et (141). On a, pour les déterminer, un nombre égal d'équations de condition, qui sont les équations (142), (143), (144), (145) et (146).

23. D'après ce qui vient d'être exposé, on voit qu'il serait facile d'étendre la solution du problème au cas où le fil serait composé d'un nombre quelconque de portions hétérogènes et chargé d'un nombre quelconque de poids repartis sur sa longueur. Chaque portion de fil exige une équation différentielle spéciale du 2ème ordre qui introduit deux constantes arbitraires; et pour déterminer ces constantes on a également deux nouvelles équations de condition analogues aux équations (144) et (145).

Si la masse m_1 était nulle, le fil se composerait de deux parties hétérogènes continues, et l'équation (145) deviendrait

$$\frac{dX_1^{(1)}}{dx} = \frac{dX_2^{(1)}}{dx}\,;$$

d'où l'on conclut que

$$\frac{d\gamma_1^{(1)}}{dx} = \frac{d\gamma_1^{(1)}}{dx}\,,$$

pendant toute la durée du mouvement; ce résultat prouve que, dans

le cas que nous considérons, les courbes formées par les deux portions du fil, s'unissent tangentiellement dans leur point de jonction.

Ainsi se trouve résolue d'une manière simple et évidente la question soulevée par BERNOUILLI et EULER au sujet des vibrations d'une corde composée de deux parties hétérogènes. POISSON était arrivé à un résultat conforme au précédent en suivant toutefois une voie différente de celle que nous avons adoptée (Voir le Cahier XVIIIème du *Journal de l'École Polytechnique*, *page* 474).

24. Si l'on suppose que la masse du fil, sans être négligeable entièrement, soit néanmoins très-petite par rapport aux masses m_1, m_2, on pourra considérer comme constante la tension dans chacune des portions du fil; alors les équations (139) et (141) donneront, en vertu de l'équation (111)-(a),

$$(147) \quad \cdots\cdots \begin{cases} k^2\omega_1 X_1 + g\{m_1 + m_2\}\dfrac{d^2X_1}{dx^2} = 0 \ ; \\ k^2\omega_2 X_2 + g m_2 \dfrac{d^2X_2}{dx^2} = 0 \ . \end{cases}$$

D'où l'on déduira, par l'intégration,

$$(148) \quad \cdots\cdots \begin{cases} X_1 = A_1 \sin k\dfrac{x}{c_1} + B_1 \cos k\dfrac{x}{c_1} \ ; \\ X_2 = A_2 \sin k\dfrac{x}{c_2} + B_2 \cos k\dfrac{x}{c_2} \ ; \end{cases}$$

où, par abréviation, l'on a fait

$$(149) \quad \cdots\cdots \begin{cases} c_1 = \sqrt{\dfrac{g(m_1+m_2)}{\omega_1}} \ ; \\ c_2 = \sqrt{\dfrac{g m_2}{\omega_2}} \ , \end{cases}$$

et où A_1, B_1; A_2, B_2 sont des constantes arbitraires. Chacune des expressions (148), de même que celles de y_1 et y_2 correspondantes, ne servent que pour l'extension de la partie du fil à laquelle chacune d'elles se rapporte; au delà de ces limites elles cessent de s'appliquer au mouvement dont il s'agit.

Occupons nous de la détermination des coefficients A_1, B_1, A_2, B_2 et de k. L'équation (142) donne

$$(150) \ldots\ldots \qquad X_1^{(0)} = 0 = B_1 ,$$

ce qui réduit l'expression générale de X_1 à

$$(151) \ldots\ldots \qquad X_1 = A_1 \sin(kt + \varepsilon) .$$

On déduit de l'équation (144)

$$(152) \ldots\ldots \qquad A_1 \sin k\frac{l_1}{c_1} = A_2 \sin k\frac{l_1}{c_2} + B_2 \cos k\frac{l_1}{c_2} ,$$

et des équations (143), (145):

$$(153) \ldots\ldots \qquad \frac{kc_2}{g}\left(A_2 \sin k\frac{r}{c_2} + B_2 \cos k\frac{r}{c_2}\right) - A_2 \cos k\frac{r}{c_2} + B_2 \sin k\frac{r}{c_2} = 0 ;$$

$$(154) \ldots\ldots \qquad \frac{k}{g} m_1 A_1 \sin k\frac{l_1}{c_1} - \frac{1}{c_1}(m_1 + m_2) A_1 \cos k\frac{l_1}{c_1}$$

$$+ \frac{1}{c_2} m_2 \left(A_2 \cos k\frac{l_1}{c_2} - B_2 \sin k\frac{l_1}{c_2}\right) = 0 .$$

Des équations (152) et (153) on déduit les expressions des rapports $\frac{A_2}{B_1}$ et $\frac{B_2}{A_1}$; en les substituant, dans l'équation (154), on en obtient une qui sert à déterminer les valeurs de k. Faisant ces opérations, et observant que $r = l_1 + l_2$, on aura

$$(155) \ldots\ldots \qquad \begin{cases} \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{\sin\dfrac{kl_1}{c_1}\left\{\sin\dfrac{kr}{c_2} + \dfrac{kc_2}{g}\cos\dfrac{kr}{c_2}\right\}}{\cos\dfrac{kl_2}{c_2} - \dfrac{kc_2}{g}\sin\dfrac{kl_2}{c_2}} ; \\ \dfrac{B_2}{A_1} = \dfrac{\sin\dfrac{kl_1}{c_1}\left\{\cos\dfrac{kr}{c_2} - \dfrac{kc_2}{g}\sin\dfrac{kr}{c_2}\right\}}{\cos\dfrac{kl_2}{c_2} - \dfrac{kc_2}{g}\sin\dfrac{kl_2}{c_2}} ; \end{cases}$$

$$(156) \ldots\ldots \quad m_1 c_2 \left\{ \frac{kc_1}{g} \sin\frac{kl_1}{c_1} + \cos\frac{kl_1}{c_1} \right\} \left\{ \cos\frac{kl_2}{c_2} - \frac{kc_2}{c_2} \sin\frac{kl_2}{c_2} \right\}$$

$$= m_2 \left\{ \begin{array}{l} c_2 \cos\dfrac{kl_1}{c_1}\cos\dfrac{kl_2}{c_2} - c_1 \sin\dfrac{kl_1}{c_1}\sin\dfrac{kl_2}{c_2} \\ -\dfrac{kc_2}{g}\left(c_2 \sin\dfrac{kl_2}{c_2}\cos\dfrac{kl_1}{c_1} + c_1 \sin\dfrac{kl_1}{c_1}\cos\dfrac{kl_2}{c_2} \right) \end{array} \right\}.$$

Enfin les équations (146) donneront les valeurs de $A_1 \sin\varepsilon$ et $A_1 \cos\varepsilon$ par la substitution des expressions de X_1, X_2, $\frac{A_2}{A_1}$ et $\frac{B_2}{A_1}$.

Lorsque m_1 est nul, l'équation (156) se réduit à

$$(157) \ldots\ldots \quad c_2 \sin\frac{kl_2}{c_2}\cos\frac{kl_1}{c_1} + c_1 \sin\frac{kl_1}{c_1}\cos\frac{kl_2}{c_2}$$

$$= \frac{g}{kc_2}\left\{ c_2 \cos\frac{kl_1}{c_1}\cos\frac{kl_2}{c_2} - c_1 \sin\frac{kl_1}{c_1}\sin\frac{kl_2}{c_2} \right\}.$$

25. Nous avons supposé que m_2 était très-grand par rapport à la masse du fil ; par conséquent $\frac{1}{c_1}$ et $\frac{1}{c_2}$ sont des quantités très-petites ; ainsi, pour déduire la plus petite racine de l'équation précédente, on pourra y prendre les arcs pour leurs sinus, et négliger leurs quarrés. De cette manière, l'on aura

$$(158) \ldots\ldots \quad 1 - \frac{k^2(l_1 + l_2)}{g} = \frac{k^2 l_1 l_2}{c_2^2},$$

ou bien, en négligeant le second membre de cette équation

$$(159) \ldots\ldots \quad k' = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2}} = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Comme on le voit, cette racine correspond au mouvement d'un pendule simple de longueur égale à r; ainsi le fil et le masse m_2 oscilleront comme un pendule simple de longueur r. Pour obtenir les autres oscillations qui existent simultanément avec la précédente, nous observerons que le second membre de l'équation (157) deviendra toujours plus petit à mesure que k augmentera ; ainsi l'on satisfera approximativement à

cette équation, en rendant nul son premier membre, ce qui donne:

$$(160) \quad \ldots\ldots \quad c_2 \sin \frac{k l_2}{c_2} \cos \frac{k l_1}{c_1} + c_1 \sin \frac{k l_1}{c_1} \cos \frac{k l_2}{c_2} = 0 \ .$$

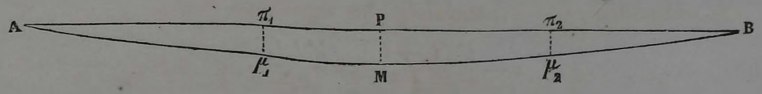
Or, les racines que l'on déduit de cette équation, correspondent aux mouvements vibratoires d'une corde composée de deux parties hétérogènes et fixées à ses deux extrémités, ainsi qu'il sera démontré plus loin; d'où l'on conclut que, dans le cas que nous examinons, le fil vibrera autour de la droite mobile qui unit la masse m_2 à l'extrémité supérieure, comme si elle était fixée par ses deux extrémités, tandis que ladite masse m_2 exécutera autour de la verticale des oscillations isochrones. Ce résultat est analogue à celui que nous avons obtenu dans le cas d'un fil homogène.

En supposant nulle la masse du fil, ce qui revient à faire $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$, on retrouvera les formules du § III.

Quatrième Problème.

Déterminer les vibrations transversales d'un fil $\overline{AMB}$ (fig. 6) *composé de deux parties hétérogènes* $\overline{AM}$ *et* $\overline{MB}$, *fixé par ses deux extrémités, portant, au point de jonction de ses deux parties, une masse* m_1, *et soumis à une tension constante* T.

Fig. 6.



26. Nous emploierons les mêmes dénominations que dans le problème précédent. Les équations générales donneront dans le cas actuel :

$$(161) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} y_1 = \Sigma . X_1 \sin(kt + \varepsilon) \ ; \\ y_2 = \Sigma . X_2 \sin(kt + \varepsilon) \ ; \end{cases}$$

$$(162) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} k^2 \omega_1 X_1 + T . \dfrac{d^2 X_1}{dx^2} = 0 \ ; \\ k^2 \omega_2 X_2 + T . \dfrac{d^2 X_2}{dx^2} = 0 \ ; \end{cases}$$

$$(163)\quad \begin{cases} \sin.\varepsilon = \dfrac{\Sigma.Xm\beta}{\Sigma.X^2m} = \dfrac{m_1X_1^{(1)}\beta_1+\displaystyle\int_0^{l_1}\omega_1X_1\beta\,dx+\int_{l_1}^{r}\omega_2X_2\beta\,dx}{m_1(X_1^{(1)})^2+\displaystyle\int_0^{l_1}\omega_1X_1^2\,dx+\int_{l_1}^{r}\omega_2X_2^2\,dx}\ ; \\ \cos.\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\Sigma.Xm\overline{\beta}}{\Sigma.X^2m} = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{m_1X_1^{(1)}\overline{\beta}_1+\displaystyle\int_0^{l_1}\omega_1X_1\overline{\beta}\,dx+\int_{l_1}^{r}\omega_2X_2\overline{\beta}\,dx}{m_1(X_1^{(1)})^2+\displaystyle\int_0^{l_1}\omega_1X_1^2\,dx+\int_{l_1}^{r}\omega_2X_2^2\,dx}\ ; \end{cases}$$

pour les deux points extrêmes A et B on aura

$$(164)\ \ldots\ldots \qquad X_1^{(0)} = 0\ ; \qquad X_2^{(2)} = 0\ ,$$

et, pour le point de jonction M,

$$(165)\ \ldots\ldots \qquad X_1^{(1)} = X_2^{(1)}\ .$$

Enfin pour le même point M on a l'équation de condition

$$(166)\ \ldots\ldots \qquad k^2m_1X_1^{(1)} + T\left(\frac{dX_2^{(1)}}{dx} - \frac{dX_1^{(1)}}{dx}\right) = 0\ .$$

On obtiendra, par l'intégration des équations (162),

$$(167)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} X_1 = A_1\sin.\left(kx\sqrt{\dfrac{\omega_1}{T}} + a_1\right)\ , \\ X_2 = A_2\sin.\left(kx\sqrt{\dfrac{\omega_2}{T}} + a_2\right)\ , \end{cases}$$

où A_1, A_2; a_1, a_2 sont des constantes arbitraires. Les équations (164) fournissent les conditions

$$A_1\sin.a_1 = 0\ ; \qquad A_2\sin.\left(kr\sqrt{\frac{\omega_2}{T}} + a_1\right) = 0\ ;$$

d'où l'on conclut

$$a_1 = 0\ ; \qquad a_2 = -kr\sqrt{\frac{\omega_2}{T}}\ ;$$

ce qui réduit les équations (167) aux suivantes:

$$(168)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} X_1 = A_1 \sin. kx \sqrt{\frac{\omega_1}{T}}\,; \\ X_2 = A_2 \sin. k(r-x) \sqrt{\frac{\omega_2}{T}}\,. \end{cases}$$

Dans cette dernière équation on a changé le signe de A_2 ce qui ne varie pas la solution, vû que A_2 est une constante arbitraire.

L'équation (165) donnera

$$(169)\ \ldots\ldots\ldots \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sin. l_2 k \sqrt{\frac{\omega_2}{T}}}{\sin. l_1 k \sqrt{\frac{\omega_1}{T}}}\,,$$

et l'équation (166) se transformera dans la suivante

$$(170)\ \ldots\ \frac{k m_1}{\sqrt{T}} - \sqrt{\omega_1} \cot. k l_1 \sqrt{\frac{\omega_1}{T}} - \sqrt{\omega_2} \cot. k l_2 \sqrt{\frac{\omega_2}{T}} = 0\,,$$

qui sert à déterminer les valeurs de k.

Les valeurs de A_1 et A_2 pourront encore s'écrire de cette manière:

$$(171)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} A_1 = A \sin. l_2 k \sqrt{\frac{\omega_2}{T}}\,; \\ A_2 = A \sin. l_1 k \sqrt{\frac{\omega_1}{T}}\,; \end{cases}$$

A étant une nouvelle constante arbitraire.

27. On peut donner au dénominateur des expressions de sin.ε et cos.ε, dans les équations (163), une autre forme qu'il importe de connaître. Pour cela observons qu'en vertu des équations (162), (164), (165) on a

$$\int_0^{l_1} \omega_1 X_1^2 dx = -\frac{T}{k^2}\int_0^{l_1} X_1 d.\frac{dX_1}{dx} = -\frac{T}{k^2} X_1^{(1)} \frac{dX_1^{(1)}}{dx} + \frac{T}{k^2}\int_0^{l_1} \frac{dX_1^2}{dx^2}\, dx\,;$$

$$\int_{l_1}^{r} \omega_2 X_2^2 dx = -\frac{T}{k^2}\int_{l_1}^{r} X_2 d.\frac{dX_2}{dx} = -\frac{T}{k^2} X_2^{(2)} \frac{dX_2^{(2)}}{dx} + \frac{T}{k^2}\int_{l_1}^{r} \frac{dX_2^2}{dx^2} dx\,;$$

par conséquent l'on aura, pour l'expression du dénominateur commun,

$$m_1 (X_1^{(1)})^2 + \int_0^{l_1} \omega_1 X_1^2 dx + \int_{l_1}^{r} \omega_2 X_2^2 dx$$

$$= m_1 (X_1^{(1)})^2 + \frac{T}{k^2} X_1^{(1)} \left(\frac{dX_2^{(1)}}{dx} - \frac{dX_1^{(1)}}{dx} \right) + \frac{T}{k^2} \int_0^{l_1} \frac{dX_1^2}{dx^2} dx + \frac{T}{k^2} \int_{l_1}^{r} \frac{dX_2^2}{dx^2} dx ;$$

En vertu de l'équation (166), le second membre de l'équation précédente se réduit à

$$(172) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{T}{k^2} \left\{ \int_0^{l_1} \frac{dX_1^2}{dx^2} dx + \int_{l_1}^{r} \frac{dX_2^2}{dx^2} dx \right\} ,$$

qui est le dénominateur commun aux expressions de $\sin.\varepsilon$ et $\cos.\varepsilon$.

28. Il est facile de généraliser ce résultat. Pour cela reprenons les équations (92) et sommons-les, après les avoir respectivement multipliées par $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n \ldots\ldots p_r \ldots\ldots$, on aura

$$(173) \ldots \quad k^2 . \mathcal{S} . m p^2 - \frac{T_1}{l_1} (p_2^2 - 2p_1 p_2 + p_1^2) - \frac{T_2}{l_2} (p_3^2 - 2p_2 p_1 + p_2^2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{T_n}{l_n} (p^2_{n+1} - 2p_n p_{n+1} + p^2_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{T_{r-1}}{l_{r-1}} (p_r^2 - 2p_r p_{r-1} + p^2_{r-1}) = 0 .$$

Ou bien, en représentant la différence $p_{n+1} - p_n$ par Δp_n,

$$(174) \ldots\ldots\ldots \quad k^2 . \mathcal{S} . m p^2 - \mathcal{S} . \frac{T}{l} (\Delta p)^2 = 0 ,$$

d'où l'on conclut que les expressions (105) pourront s'écrire de la manière suivante :

$$(175) \ldots\ldots \quad \sin.\varepsilon = \frac{\mathcal{S} . m p \beta}{\frac{1}{k^2} . \mathcal{S} . \frac{T}{l} (\Delta p)^2} , \qquad \cos.\varepsilon = \frac{\mathcal{S} . m p \overline{\beta}}{\frac{1}{k^2} . \mathcal{S} . \frac{T}{l} (\Delta p)^2} .$$

29. Dans ce qui va suivre je supposerai chaque portion du fil homogène, c'est-à-dire que ω_1 et ω_2 seront constants dans toute l'extension de la partie correspondante du fil. Cela posé faisons, par abréviation,

$$(176)\ \ldots\ldots \qquad \frac{1}{c_1}=\sqrt{\frac{\omega_1}{T}}\ ; \qquad \frac{1}{c_2}=\sqrt{\frac{\omega_2}{T}}\ ,$$

et observons que

$$\int_{l_1}^{r}\sin.\,k\,\frac{r-x}{c_2}\,dx=\int_{0}^{l_2}\sin.\,\frac{kx'}{c_2}\,dx'\ ;$$

$$\int_{l_1}^{r}\beta_2\sin.\,\frac{k(r-x)}{c_2}\,dx=\int_{0}^{l_2}\beta_2\sin.\,\frac{kx'}{c_2}\,dx'\ ;$$

les x' étant comptés à partir de l'extrémité B du fil, et les valeurs de β_2 étant prises correspondantes aux points auxquels se rapportent les nouvelles abscisses x'.

On déduira facilement des équations (163), en ayant égard aux équations (171),

$$(177)\ \begin{cases} A\sin.\varepsilon= \\ \dfrac{2}{k}\cdot\dfrac{m_1\beta_1^{(1)}\sin.\dfrac{kl_1}{c_1}\sin.\dfrac{kl_2}{c_2}+\omega_1\sin.\dfrac{kl_2}{c_2}\displaystyle\int_0^{l_1}\beta_1\sin.\frac{kx}{c_1}\,dx+\omega_2\sin.\dfrac{kl_1}{c_1}\int_0^{l_2}\beta_2\sin.\dfrac{kx'}{c_2}\,dx'}{m_1\sin.^2\dfrac{kl_1}{c_1}\sin.^2\dfrac{kl_2}{c_2}+l_1\omega_1\sin.^2\dfrac{kl_2}{c_2}+l_2\omega_2\sin.^2\dfrac{kl_1}{c_1}}\ ; \\ A\cos.\varepsilon= \\ \dfrac{2}{k}\cdot\dfrac{m_1\overline{\beta_1}^{(1)}\sin.\dfrac{kl_1}{c_1}\sin.\dfrac{kl_2}{c_2}+\omega_1\sin.\dfrac{kl_2}{c_2}\displaystyle\int_0^{l_1}\overline{\beta_1}\sin.\frac{kx}{c_1}\,dx+\omega_2\sin.\dfrac{kl_1}{c_1}\int_0^{l_2}\overline{\beta_2}\sin.\dfrac{kx'}{c_2}\,dx'}{m_1\sin.^2\dfrac{kl_1}{c_1}\sin.^2\dfrac{kl_2}{c_2}+l_1\omega_1\sin.^2\dfrac{kl_2}{c_2}+l_2\omega_2\sin.^2\dfrac{kl_1}{c_1}}\ . \end{cases}$$

Lorsqu'on fait $m_1=0$, l'équation de condition (170) devient :

$$(178)\ \ldots\ldots \quad \sqrt{\omega_1}\,.\sin.kl_2\sqrt{\frac{\omega_2}{T}}\,.\cos.kl_1\sqrt{\frac{\omega_1}{T}}$$

$$+\sqrt{\omega_2}\,.\sin.kl_1\sqrt{\frac{\omega_1}{T}}\,.\cos.kl_2\sqrt{\frac{\omega_2}{T}}=0\ ;$$

ou bien

$$(179)\ \ldots\ldots \quad c_2\sin.\frac{kl_2}{c_2}\,.\cos.\frac{kl_1}{c_1}+c_1\sin.\frac{kl_1}{c_1}\,.\cos.\frac{kl_2}{c_2}=0\ ,$$

et les expressions de $A\sin.\varepsilon$, $A\cos.\varepsilon$ se réduiront à

$$(180)\ldots A\sin.\varepsilon=2.\frac{c_2^2\sin.\frac{kl_2}{c_2}\int_0^{l_1}\beta_1\sin.\frac{kx}{c_1}dx+c_1^2\sin.\frac{kl_1}{c_1}\int_0^{l_2}\beta_2\sin.\frac{kx'}{c_1}dx'}{c_2^2l_1\sin.^2\frac{kl_2}{c_2}+c_1^2l_2\sin.^2\frac{kl_1}{c_1}}\ ;$$

on aura pour $A\cos.\varepsilon$ une expression analogue.

L'on voit que l'équation (179) coïncide avec l'équation (160); ainsi la proposition que nous avions énoncée au n.° **25** se trouve confirmée.

30. Les résultats précédents concordent avec ceux obtenus par Poisson dans le *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XVIIIème, *pages* 457 *et* 462, seulement le dénominateur commun aux expressions de $A\sin.\varepsilon$ et $A\cos.\varepsilon$ y est présenté sous une forme différente. En effet, dans les formules de Poisson, le dénominateur est, *mutatis mutandis*,

$$\left\{(c_2^2l_1+c_1^2l_2)\sin.\frac{kl_1}{c_1}\sin.\frac{kl_2}{c_2}-c_1c_2(l_1+l_2)\cos.\frac{kl_1}{c_1}\cos.\frac{kl_2}{c_2}\right\}\sin.\frac{kl_1}{c_1}\sin.\frac{kl_2}{c_2}\ ;$$

or cette expression peut s'écrire de la manière suivante :

$$c_2^2l_1\sin.^2\frac{kl_2}{c_2}+c_1^2l_2\sin.^2\frac{kl_1}{c_1}-$$

$$\left\{c_2\sin.\frac{kl_2}{c_2}\cos.\frac{kl_1}{c_1}+c_1\sin.\frac{kl_1}{c_1}\cos.\frac{kl_2}{c_2}\right\}\left\{c_2l_1\sin.\frac{kl_1}{c_1}\cos.\frac{kl_1}{c_1}+c_1l_2\sin.\frac{kl_2}{c_2}\cos.\frac{kl_2}{c_2}\right\}\ ;$$

en vertu de l'équation (179) elle se réduit à

$$c_2^2l_1\sin.^2\frac{kl_2}{c_2}+c_1^2l_2\sin.^2\frac{kl_1}{c_2}\ ,$$

qui est précisément le dénominateur des expressions de $A\sin.\varepsilon$ et $A\cos.\varepsilon$ tel que nous l'avons trouvé.

31. Lorsque le fil est homogène, l'on a $\omega_1=\omega_2$, $c_1=c_2$ et l'équation (179) devient

$$(181)\ \ldots\ldots\ldots\qquad \sin.\frac{k(l_1+l_2)}{c_1}=\sin.\frac{kr}{c_1}=0\ ,$$

on satisfait à cette équation en prenant

$$(182)\ \ldots\ldots\ldots\qquad \frac{kr}{c_1}=i\pi\ ;$$

i exprimant un nombre entier, et π le rapport de la circonférence au diamètre. L'on aura

$$(183)\ldots\ A\sin.\varepsilon=2.\frac{\sin.\frac{kl_2}{c_1}\int_0^{l_1}\beta_1\sin.\frac{kx}{c_1}dx+\sin.\frac{kl_1}{c_1}\int_0^{l_2}\beta_2\sin.\frac{kx'}{c_1}dx'}{l_1\sin.^2\frac{kl_2}{c_1}+l_2\sin.^2\frac{kl_1}{c_1}}\ ,$$

et une expression analogue pour $A\cos.\varepsilon$.

Les expressions (161) deviennent

$$(184)\ldots\ \begin{cases} y_1=\Sigma.A\sin.\frac{kl_2}{c_1}\sin.\frac{kx}{c_1}\sin(kt+\varepsilon)\ ; \\ y_2=\Sigma.A\sin.\frac{kl_1}{c_1}\sin.\frac{k(r-x)}{c_1}\sin.(kt+\varepsilon)\ . \end{cases}$$

Cela posé observons que l'on a

$$\sin.\frac{kl_2}{c_1}=\sin.\frac{k(r-l_1)}{c_1}=-(-1)^i\sin.\frac{i\pi l_1}{r}\ ;$$

$$\int_0^{l_2}\beta_2\sin.\frac{kx'}{c_1}dx'=\int_{l_1}^{r}\beta_2\sin.\frac{k(r-x)}{c_1}dx=-(-1)^i\int_{l_1}^{r}\beta_2\sin.\frac{i\pi x}{r}dx\ ;$$

$$\int_0^{l}\beta_1\sin.\frac{i\pi x}{c_1}dx+\int_{l_1}^{r}\beta_2\sin.\frac{i\pi x}{r}dx=\int_0^{r}\beta\sin.\frac{i\pi x}{r}dx\ ;$$

β représentant l'expression générale de β_1 et β_2 correspondante à une abscisse x. Avec ces données, il sera aisé de voir que les expressions (184) se réduisent à la suivante :

$$(185)\ \ldots\ldots\quad y=\frac{2}{c_1\pi}.\Sigma.\frac{1}{i}\left(\sin.\frac{i\pi x}{r}\int_0^r\beta\sin.\frac{i\pi x}{r}\,dx\right)\sin.\frac{i\pi c_1}{r}t$$

$$+\frac{2}{r}.\Sigma.\left(\sin.\frac{i\pi x}{r}\int_0^r\beta\sin.\frac{i\pi x}{r}\,dx\right)\cos.\frac{i\pi c_1}{r}t\ ;$$

formule qui coïncide avec celle connue des cordes vibrantes (Voir Poisson, *Mécanique*, 2.ème édition, tom. II, page 309).

32. Dans les Problêmes deuxième et troisième, nous avons vu que lorsque la masse inférieure est très-pesante relativement à celle du fil, cette masse oscillait comme un pendule simple de longueur égale à celle du fil, et que celui-ci vibrait autour de la droite qui unit le point immobile avec la masse inférieure, comme s'il était fixe et tendu entre ces deux points extrêmes. Il est aisé de généraliser cette proposition et de l'étendre à un fil composé d'un nombre quelconque d'éléments hétérogènes.

Pour cela, reprenons les équations (92) ; nous admettrons que la tension est la même dans tous les éléments du fil et égale au poids de la masse inférieure m_r, ainsi l'on aura $T=g\,m_r$.

Comme le premier point m_1 est fixe, il s'ensuit que, pendant toute la durée du mouvement, p_1 est nul ; ainsi la première équation (92) se réduit à $p_1=0$, on admettra que $\frac{m_n}{m_r}$ est une quantité très-petite ; cela posé, les équations, dont il s'agit, prendront la forme suivante, ainsi qu'il est aisé de le vérifier,

$$(186)\ \ldots\ldots\quad\begin{cases} p_1=0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^2.m_np_n+g\,m_r\left\{\dfrac{\Delta p_n}{l_n}-\dfrac{\Delta p_{n-1}}{l_{n-1}}\right\}=0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^2.m_rp_r-g\,m_r\dfrac{\Delta p_{r-1}}{l_{r-1}}=0\ . \end{cases}$$

Cherchons d'abord la plus petite valeur de k^2 qu'on puisse déduire de ces équations; il est clair que k'^2 étant cette plus petite valeur, si l'on écrit l'équation générale de cette manière:

$$k'^2 \frac{m_n}{m_r} p'_n + \frac{\Delta p'_n}{l_n} - \frac{\Delta p'_{n-1}}{l_{n-1}} = 0 \ ;$$

le terme $k'^2 \frac{m_n}{m_r} p'_n$ pourra être négligé; d'où l'on conclura que

$$\frac{\Delta p'_n}{l_n} - \frac{\Delta p'_{n-1}}{l_{n-1}} = 0 \ ;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\Delta p'_n}{\Delta p'_{n-1}} = \frac{l_n}{l_{n-1}} \ ,$$

équation à laquelle on satisfait en prenant

$$p'_n = C \left\{ l_1 + l_2 + l_3 \ldots\ldots + l_{n-1} \right\} \ ,$$

C étant une constante. Ainsi la dernière équation (186) deviendra

$$k^2 \{ l_1 + l_2 \ldots\ldots + l_{r-1}) - g = 0 \ ,$$

ou bien

$$k'^2 . r = g \ ,$$

d'où l'on déduit

$$k' = \sqrt{\frac{g}{r}} \ ,$$

qui correspond à la formule du pendule simple de longueur r.

La valeur précédente de p_n démontre que les valeurs de y, correspondantes à k', sont les ordonnées de la droite qui unit le point fixe avec la masse m_r, puisqu'on a, en général,

$$y'_n = p'_n \sin.(k't + \varepsilon') = C(l_1 + l_2 \ldots\ldots + l_{n-1}) \sin.(k't + \varepsilon') \ .$$

Pour juger de la nature des vibrations qui correspondent aux autres valeurs de k plus grande que k', mettons la dernière équation (186) sous la forme

$$p_r - \frac{g}{k^2} . \frac{\Delta p_{r-1}}{l_{r-1}} = 0 \ ,$$

il est clair que, à mesure que k augmente, p_r tend à devenir nul;

ainsi en faisant, par approximation,

$$p_r = 0 ,$$

les équations (186) deviennent, pour toutes les valeurs de k différentes de k' :

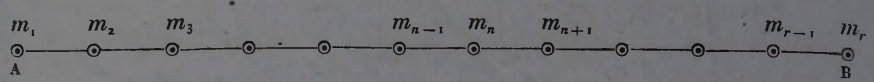
$$(187)\ldots\ldots \begin{cases} p_1 = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^2 m_n p_n + g m_r \left\{ \dfrac{\Delta p_n}{l_n} - \dfrac{\Delta p_{n-1}}{l_{n-1}} \right\} = 0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_r = 0 . \end{cases}$$

Or les valeurs de k, qu'on déduit de ces équations, sont celles mêmes qu'on aurait si le fil était fixé à ses deux extrémités et soumis à une tension constante égale à $m_r g$. Donc il est démontré que la masse m_r oscillera comme un pendule simple de longueur r, et que les autres points du systême seront entrainés dans le mouvement oscillatoire de la droite qui unit le point fixe avec le point m_r, et exécuteront, en même temps, autour de cette droite, des vibrations comme si le fil était fixe à ses deux extrémités et tendu par une force égale au poids de la masse m_r.

§ V.

Vibrations longitudinales d'une verge élastique rectiligne chargée de différentes masses réparties sur divers points de sa longueur.

Fig. 7.



33. Considérons une série de masses m_1, $m_2 \ldots\ldots m_{n-1}$, $m_n \ldots\ldots m_{r-1}$, m_r (fig. 7) placées en ligne droite sur une verge élastique AB et distantes les unes des autres d'intervalles respectivement égaux à

$l_1, l_2 \ldots\ldots l_{n-1}, l_n \ldots\ldots l_{r-1}$, dans l'état de repos. On admettra que lorsqu'on éloigne ou rapproche, l'une de l'autre, dans le sens rectiligne, deux masses consécutives, il se développe une force attractive ou répulsive proportionnelle à la variation de distance.

Nous compterons les abscisses à partir du point A vers B : nous désignerons par $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots x_r$ les variations des abscisses correspondantes aux masses $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n \ldots\ldots m_r$, après un temps t; $R_1, R_2 \ldots\ldots R_{n-1} \ldots\ldots R_{r-1}$ les efforts développés dans les sens des éléments $l_1, l_2 \ldots\ldots l_{n-1} \ldots\ldots l_{r-1}$, qui unissent les masses susdites. En représentant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_{n-1} \ldots\ldots \varepsilon_{r-1}$ des coefficients correspondants à ces divers éléments, on aura

$$(188) \ldots\ldots \begin{cases} R_1 = \varepsilon_1 \dfrac{x_2 - x_1}{l_1} ; & R_2 = \varepsilon_2 \dfrac{x_3 - x_2}{l_2} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & R_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{l_{n-1}} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & R_{r-1} = \varepsilon_{r-1} \dfrac{x_r - x_{r-1}}{l_{r-1}} . \end{cases}$$

Cela posé, si, pour le moment, nous faisons abstraction de la masse des divers éléments de la verge, nous aurons, pour déterminer les mouvements des masses $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n \ldots\ldots m_r$, les équations suivantes :

$$(189) \ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = R_1 = \varepsilon_1 \dfrac{x_2 - x_1}{l_1} ; \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = R_2 - R_1 = \varepsilon_2 \dfrac{x_3 - x_2}{l_2} - \varepsilon_1 \dfrac{x_2 - x_1}{l_1} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ m_n \dfrac{d^2 x_n}{dt^2} = R_n - R_{n-1} = \varepsilon_n \dfrac{x_{n+1} - x_n}{l_n} - \varepsilon_{n-1} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{l_{n-1}} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ m_r \dfrac{d^2 x_r}{dt^2} = - R_{r-1} = - \varepsilon_{r-1} \dfrac{x_r - x_{r-1}}{l_{r-1}} . \end{cases}$$

Si l'on compare ces équations aux équations (89), relatives aux mouvements transversaux de masses unies entr'elles par un fil flexible, on

reconnaîtra qu'elles leurs sont parfaitement semblables; d'où l'on voit, que les mouvements longitudinaux suivent les mêmes lois que les mouvements transversaux. En outre, comme l'établissement des équations précédentes est indépendant des mouvements vibratoires transversaux que peut prendre le système, on en conclut que les vibrations longitudinales existent simultanément avec les vibrations transversales et qu'elles sont respectivement indépendantes les unes des autres.

Toute l'analyse que nous avons développée dans le § IV, s'applique également au problème actuel; c'est pourquoi nous nous bornerons à en examiner quelques cas particuliers.

34. Par analogie avec les équations (91) et (92) on déduit des équations (189) les suivantes:

$$(190)\ldots\begin{cases} m_1p_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+m_2p_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}\ldots\ldots\ldots+m_rp_r\dfrac{d^2x_r}{dt^2} \\ =x_1\left(-p_1\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}+p_2\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}\right)+x_2\left[p_1\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}-p_2\left(\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}+\dfrac{\varepsilon_2}{l_2}\right)+p_3\dfrac{\varepsilon_2}{l_2}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +x_n\left[p_{n-1}\dfrac{\varepsilon_{n-1}}{l_{n-1}}-p_n\left(\dfrac{\varepsilon_{n-1}}{l_{n-1}}+\dfrac{\varepsilon_n}{l_n}\right)+p_{n+1}\dfrac{\varepsilon_n}{l_n}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +x_r\left[p_{r-1}\dfrac{\varepsilon_{r-1}}{l_{r-1}}-p_r\dfrac{\varepsilon_{r-1}}{l_{r-1}}\right]; \end{cases}$$

$$(191)\ldots\begin{cases} k^2.m_1p_1+(p_2-p_1)\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}=0\ ; \\ k^2.m_2p_2+\left\{p_1\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}-p_2\left(\dfrac{\varepsilon_1}{l_1}+\dfrac{\varepsilon_2}{l_2}\right)+p_3\dfrac{\varepsilon_2}{l_2}\right\}=0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ k^2.m_np_n+\left\{p_{n-1}\dfrac{\varepsilon_{n-1}}{l_{n-1}}-p_n\left(\dfrac{\varepsilon_{n-1}}{l_{n-1}}+\dfrac{\varepsilon_n}{l_n}\right)+p_{n+1}\dfrac{\varepsilon_n}{l_n}\right\}=0\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ k^2.m_rp_r+(p_{r-1}-p_r)\dfrac{\varepsilon_{r-1}}{l_{r-1}}=0\ . \end{cases}$$

En sommant les équations précédentes on obtiendra:

$$k^2.(m_1p_1+m_2p_2+m_3p_3\ldots\ldots+m_rp_r)=0\ ,$$

ou bien

$$(192)\ \ldots\ldots\quad m_1p_1+m_2p_2+m_3p_3\ldots\ldots+m_rp_r=0\ .$$

Si l'on fait

$$(193)\ \ldots\ldots\quad v=m_1p_1x_1+m_2p_2x_2\ldots\ldots\ldots+m_rp_rx_r\ ,$$

l'équation (190) deviendra

$$(194)\ \ldots\ldots\quad \frac{d^2v}{dt^2}+k^2v=0\ ,$$

d'où l'on déduit

$$(195)\ \ldots\ldots\quad v=L\sin.(kt+\varepsilon)\ .$$

Le nombre des points en mouvement étant r, on aura r valeurs différentes de k, auxquelles correspondront autant de valeurs de p_1, $p_2\ldots$, ce qui donnera lieu à r, équations de la forme (195), que nous distinguerons les unes des autres par l'accentuation:

$$(196)\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} v'=L'\sin.(k't+\varepsilon')\ ; \\ v''=L''\sin.(k''t+\varepsilon'')\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ v^{(r)}=L^{(r)}\sin.(k^{(r)}t+\varepsilon^{(r)})\ . \end{cases}$$

De même, que dans le § IV. n.° 13., on conclura que les valeurs de x_1, $x_2\ldots\ldots x_r$ sont les suivantes:

$$(197)\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} x_1=\sum_{(1)}^{(r)}.p_1\sin.(kt+\varepsilon)\ ; \\ x_2=\sum_{(1)}^{(r)}.p_2\sin.(kt+\varepsilon)\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ x_r=\sum_{(1)}^{(r)}.p_r\sin.(kt+\varepsilon)\ . \end{cases}$$

Mais si l'on observe la forme des équations (189) on verra facilement qu'on peut encore y satisfaire en prenant les valeurs suivantes :

$$(198)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} x_1 = M + Nt + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.p_1 \sin.(kt+\varepsilon)\ ; \\ x_2 = M + Nt + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.p_2 \sin.(kt+\varepsilon)\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ x_r = M + Nt + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.p_r \sin.(kt+\varepsilon)\ ; \end{cases}$$

où M et N sont deux coefficients que bientôt nous déterminerons.

En substituant ces valeurs dans les équations (196) on s'assurera que, en vertu de l'équation (192), les termes qui contiennent M et N disparaîtront ; par conséquent, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$ et $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2} \ldots \overline{\alpha_r}$ les valeurs initiales de $x_1, x_2 \ldots\ldots \frac{dx_1}{dt}\ ;\ \frac{dx_2}{dt} \ldots\ldots$ on aura :

$$(199)\ \ldots\ldots\quad \sin.\varepsilon = \frac{\mathrm{S}.mp\alpha}{\mathrm{S}.mp^2}\ ;\qquad \cos.\varepsilon = \frac{1}{k}.\frac{\mathrm{S}.mp\overline{\alpha}}{\mathrm{S}.mp^2}\ .$$

Les équations (198) donnent, en faisant $t = 0$,

$$(200)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \alpha_1 = M + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.p_1 \sin.\varepsilon\ ; \\ \alpha_2 = M + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.p_2 \sin.\varepsilon\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ \overline{\alpha_1} = N + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.kp_1 \cos.\varepsilon\ ; \\ \overline{\alpha_2} = N + \overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.kp_2 \cos.\varepsilon\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En multipliant respectivement ces deux séries d'équations par

$$m_1\ ;\ m_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc. etc.},$$

et sommant chaque série on aura :

$$(201)\ldots\begin{cases} m_1\alpha_1+m_2\alpha_2\ldots\ldots+m_r\alpha_r=M(m_1+m_2\ldots\ldots+m_r) \\ \qquad +\overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.(m_1p_1+m_2p_2\ldots\ldots)\sin.\varepsilon\ ; \\ m_1\overline{\alpha}_1+m_2\overline{\alpha}_2\ldots\ldots+m_r\overline{\alpha}_r=N(m_1+m_2\ldots\ldots+m_r) \\ \qquad +\overset{(r)}{\underset{(1)}{\Sigma}}.k(m_1p_1+m_2p_2\ldots\ldots)\cos.\varepsilon)\ ; \end{cases}$$

En vertu de l'équation (192) les termes multipliés par sin. ε et cos. ε disparaissent; par conséquent, des équations précédentes, l'on déduira

$$(202)\ldots\ldots\begin{cases} M=\dfrac{m_1\alpha_1+m_2\alpha_2\ldots\ldots+m_r\alpha_r}{m_1+m_2\ldots\ldots+m_r}\ ; \\ N=\dfrac{m_1\overline{\alpha}_1+m_2\overline{\alpha}_2\ldots\ldots+m_r\overline{\alpha}_r}{m_1+m_2\ldots\ldots+m_r}\ . \end{cases}$$

D'où l'on voit que M et N représentent respectivement le déplacement initial et la vîtesse initiale du centre de gravité du systême. L'on conclut de là, que le mouvement vibratoire de la verge aura lieu indépendamment du mouvement de translation uniforme que peut avoir son centre de gravité ; car si l'on fait

$$\alpha=M+\gamma\ ; \qquad \overline{\alpha}=N+\overline{\gamma}\ ;$$

γ et $\overline{\gamma}$, étant les déplacements et les vîtesses relatifs des différents points au commencement du mouvement, il est clair que, en vertu de l'équation (192), les valeurs de sin. ε et cos. ε (198) deviendront

$$(203)\ldots\ldots\ \sin.\varepsilon=\frac{\mathrm{S}.mp\gamma}{\mathrm{S}.mp^2}\ ; \qquad \cos.\varepsilon=\frac{\mathrm{S}.mp\overline{\gamma}}{\mathrm{S}.mp^2}\ ;$$

ce qui confirme notre proposition.

35. Faisons l'application des résultats précédents au cas d'une verge homogène qui ne serait chargée d'aucune masse. Nous désignerons par z l'abscisse d'un point quelconque de la verge, avant qu'il ait subi aucun déplacement ; cette abscisse, comptée à partir d'une des extrémités de la verge, deviendra, après un temps t, $z+x$. Ω étant la section

de la verge et ρ sa densité, la masse d'un élément sera $\rho\Omega dz$, et l'on aura

$$m_1 + m_2 \ldots\ldots + m_r = \rho\Omega r \ ;$$

ainsi l'expression générale de x deviendra

$$(204) \ldots\ldots \quad x = \frac{1}{r}\int_0^r \alpha\, dz + \frac{t}{r}\int_0^r \bar{\alpha}\, dz + \bar{\Sigma}.p \sin.(kt+\varepsilon) \ .$$

L'équation générale (191) donne

$$k^2.\rho\Omega p + \varepsilon\frac{d^2p}{dz^2} = 0 \ .$$

Si l'on désigne par E le module d'élasticité de la verge, l'équation précédente devient

$$(205) \ldots\ldots \quad \frac{d^2p}{dz^2} + k\frac{\rho}{E}p = 0 \ ,$$

à cause que $\varepsilon = E\Omega$; d'où l'on déduit

$$(206) \ldots\ldots \quad p = A \sin.\left(k.\sqrt{\frac{\rho}{E}}z + a\right) \ ,$$

A et a étant deux constantes arbitraires.

Supposons que les deux extrémités de la verge soient libres; la première et la dernière équation (191) donneront, pour $z=0$ et $z=r$,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \ ,$$

d'où l'on conclut

$$\cos.\, a = 0 \ ; \qquad \cos.\left(k.\sqrt{\frac{\rho}{E}}r + a\right) = 0 \ ;$$

équations auxquelles on satisfait en prenant

$$(207) \ldots\ldots \quad a = -\frac{\pi}{2} \ ; \qquad k.\sqrt{\frac{\rho}{E}}r = i\pi \ ;$$

i étant un nombre entier et π le rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi l'expression de p deviendra

$$(208)\ldots\ldots \qquad p = A\cos.\frac{i\pi z}{r}\ .$$

Au moyen de cette expression, on déduira des équations (199) les valeurs suivantes

$$(209)\ldots\ldots \begin{cases} A\sin.\varepsilon = \dfrac{2}{r}\displaystyle\int_0^r \alpha\cos.\frac{i\pi z'}{r}\,dz' \ ; \\ A\cos.\varepsilon = \dfrac{2}{i\pi\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}\cdot\displaystyle\int_0^r \overline{\alpha}\cos.\frac{i\pi z'}{r}\,dz' \ ; \end{cases}$$

faisant, par abréviation, $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, on aura, pour l'expression de x,

$$(210)\ldots\ldots \qquad x = \frac{1}{r}\int_0^r \alpha\,dz + \frac{t}{r}\int_0^r \overline{\alpha}\,dz$$

$$+\frac{2}{r}\cdot\sum_0^\infty\cdot\left(\int_0^r \alpha\cos.\frac{i\pi z'}{r}\,dz'\right)\cos.\frac{i\pi z}{r}\cos.\frac{i\pi c}{r}\,t$$

$$+\frac{2}{\pi c}\cdot\sum_0^\infty\cdot\frac{1}{i}\left(\int_0^r \overline{\alpha}\cos.\frac{i\pi z'}{r}\,dz'\right)\cos.\frac{i\pi z}{r}\sin.\frac{i\pi a}{r}\,t\ .$$

Il est aisé de vérifier que cette équation coïncide avec celle donnée par Poisson dans son *Traité de Mécanique* (2.ème édition, n.° 495). En général, si l'on fait $\alpha = f(z)$; $f(z)$ désignant une fonction, on déduit de l'équation précédente

$$(211)\ldots\ldots \quad f(z) = \frac{1}{r}\int_0^r f(z')\,dz' + \frac{2}{r}\cdot\sum_0^\infty\cdot\cos.\frac{i\pi z}{r}\int_0^r f(z')\cos.\frac{i\pi z'}{r}\,dz' \ ;$$

équation qui subsiste pour toutes les valeurs de z comprises entre 0 et r.

36. Examinons le cas où les deux extrémités de la verge sont fixes; en voulant le déduire du cas général, on supposera les deux masses extrêmes m_1 et m_r infiniment grandes et les valeurs de α_1, α_r, $\overline{\alpha_1}$ et $\overline{\alpha_r}$ nulles; ainsi les équations (202) donneront

$$M = 0 , \qquad N = 0 ;$$

on aura de même $p = 0$ pour $z = 0$ et $z = r$; d'où l'on conclut que, dans l'équation (206), on devra avoir

$$a = 0 ,$$

et

$$kr\sqrt{\frac{\rho}{E}} = i\pi .$$

Soit, par abréviation,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} ,$$

l'expression de x deviendra :

$$(212) \ldots\ldots \qquad x = \Sigma . A \sin.\frac{i\pi z}{r} \sin.\left(\frac{i\pi c}{r} t + \varepsilon\right)$$

que l'on peut écrire de cette manière

$$(213) \ldots\ x = \frac{1}{2} . \Sigma . A \left\{\cos.\left[\frac{i\pi}{r}(z - ct) - \varepsilon\right] - \cos.\left[\frac{i\pi}{r}(z + ct) + \varepsilon\right]\right\} ;$$

d'où l'on déduit

$$(214) \ldots\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} . \Sigma . \frac{i\pi c}{r} A \left\{\sin.\left[\frac{i\pi}{r}(z + ct) + \varepsilon\right] + \sin.\left[\frac{i\pi}{r}(z - ct) - \varepsilon\right]\right\} ;$$

$$(215) \ldots\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2} . \Sigma . \frac{i\pi}{r} A \left\{\sin.\left[\frac{i\pi}{r}(z + ct) + \varepsilon\right] - \sin.\left[\frac{i\pi}{r}(z - ct) - \varepsilon\right]\right\} .$$

Dans les équations précédentes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx}{dz}$ représentent respectivement, à un instant quelconque, la vîtesse et la dilatation d'un élément de la verge située à la distance z de l'origine.

Supposons que l'ébranlement initial ait eu lieu en un point situé à

la distance $z=h$ de l'origine, et pour une étendue de part et d'autre de ce point, égale à λ; de sorte que, pour toutes les valeurs de z telles que

$$z>h+\lambda \qquad \text{et} \qquad z<h-\lambda,$$

les vitesses et les dilatations initiales soient nulles; l'on aura, pour les points correspondants à les valeurs de z, lorsque $t=0$,

$$(216)\ \ldots\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}.\Sigma.\dfrac{i\pi c}{r}A\left\{\sin.\left[\dfrac{i\pi}{r}z+\varepsilon\right]+\sin.\left[\dfrac{i\pi}{r}z-\varepsilon\right]\right\}=0\ ; \\ \dfrac{dx}{dz}=\dfrac{1}{2}.\Sigma.\dfrac{i\pi}{r}A\left\{\sin.\left[\dfrac{i\pi}{r}z+\varepsilon\right]-\sin.\left[\dfrac{i\pi}{r}z-\varepsilon\right]\right\}=0\ ; \end{cases}$$

d'où l'on déduit:

$$(217)\ \ldots\ \begin{cases} \Sigma.iA\sin.\left(\dfrac{i\pi z}{r}+\varepsilon\right)=0\ ; \\ \Sigma.iA\sin.\left(\dfrac{i\pi z}{r}-\varepsilon\right)=0\ ; \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de z plus grandes que $h+\lambda$ et plus petites que $h-\lambda$.

On aura de même

$$(218)\ \ldots\ \begin{cases} \Sigma.iA\sin.\left[\dfrac{i\pi}{r}(z+ct)+\varepsilon\right]=0\ ; \\ \Sigma.iA\sin.\left[\dfrac{i\pi}{r}(z-ct)-\varepsilon\right]=0\ ; \end{cases}$$

toutes les fois que $z\pm ct$ sera $>h+\lambda$ et $<h-\lambda$; et comme ces expressions sont composées de termes circulaires, elles resteront les mêmes lorsque ct augmentera d'une quantité $2nr$, n étant un nombre entier. Par conséquent, pour toutes les valeurs de z autres que celles comprises dans la formule

$$(219)\ \ldots\ \ z\pm ct>h+\lambda\pm 2nr \quad \text{et} \quad <h-\lambda\pm 2nr,$$

les expressions de $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dx}{dz}$ seront nulles.

Soit un élément de la verge situé à une distance e de l'origine ; les valeurs du temps qui indiquent les époques où commencent et finissent les ébranlements vibratoires dans l'élément dont il s'agit, sont comprises dans les deux groupes suivants :

$$(220)\quad \left\{\begin{array}{ll} (a)\ \ldots & \left\{\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{h+\lambda+2nr-e}{c}\,, \\ t_2 = \dfrac{h-\lambda+2nr-e}{c}\,; \end{array}\right. \\ (b)\ \ldots & \left\{\begin{array}{l} t_1' = \dfrac{e+2nr-h+\lambda}{c}\,, \\ t_2' = \dfrac{e+2nr-h-\lambda}{c}\,; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

on déduit de ces équations

$$t_1 - t_2 = t_1' - t_2' = \frac{2\lambda}{c}\,.$$

Ces résultats nous montrent que l'ébranlement primitif se divise en deux ondes chacune de longueur égale à 2λ ; que ces ondes se propagent à droite et à gauche avec une vîtesse égale à c, et vont se réfléchir à chacune des extrémités de la verge d'où elles reviennent sur elles-mêmes et produisent, sur chaque point, une double série d'ébranlements dont les époques sont déterminées par les formules précédentes, en donnant successivement à n les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ..... etc.

Les expressions (214) et (215) de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx}{dz}$ peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(221)\ldots \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \frac{1}{2}.\Sigma.\dfrac{i\pi c}{r} A \left\{\begin{array}{l} \sin.\dfrac{i\pi}{r}(z+ct)\cos.\varepsilon + \cos.\dfrac{i\pi}{r}(z+ct)\sin.\varepsilon \\ + \sin.\dfrac{i\pi}{r}(z-ct)\cos.\varepsilon - \cos.\dfrac{i\pi}{r}(z-ct)\sin.\varepsilon \end{array}\right\}; \\ \dfrac{dx}{dz} = \frac{1}{2}.\Sigma.\dfrac{i\pi}{r} A \left\{\begin{array}{l} \sin.\dfrac{i\pi}{r}(z+ct)\cos.\varepsilon + \cos.\dfrac{i\pi}{r}(z+ct)\sin.\varepsilon \\ - \sin.\dfrac{i\pi}{r}(z-ct)\cos.\varepsilon + \cos.\dfrac{i\pi}{r}(z-ct)\sin.\varepsilon \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

Cela posé, si au commencement du mouvement, lorsque $t = 0$, on a

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \cdot \frac{dx}{dz} ,$$

il s'en suivra que

$$\Sigma . A \sin. \frac{i\pi}{r} z \cos. \varepsilon - \Sigma . A \cos. \frac{i\pi}{r} z \sin. \varepsilon = 0 ,$$

ou bien

$$\Sigma . A \sin. \frac{i\pi z}{r} \cos. \varepsilon + \Sigma . A \cos. \frac{i\pi z}{r} \sin. \varepsilon = 0 ,$$

selon que l'on aura

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{dx}{dz} ; \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = - c \frac{dx}{dz} .$$

On en conclura que, dans ces cas, le rapport initial entre $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx}{dz}$ se maintiendra pendant toute la durée du mouvement, et que l'ébranlement primitif qui aura lieu dans un point déterminé, ne se propagera qu'en un seul sens, au lieu de se diviser en deux ondes distinctes, comme dans le cas général.

§ VI.

Mouvements oscillatoires d'un fil flexible et inextensible, fixé par ses deux extrémités et formant une courbe sous l'action de forces distribuées sur les divers points de sa longueur.

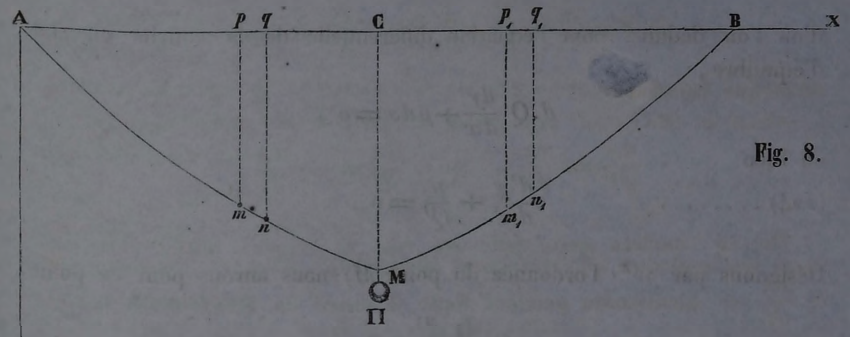


Fig. 8.

37. Pour donner un exemple du problème énoncé dans le présent §, nous prendrons le cas d'un fil flexible fixé, par ses deux extrémités, sur une même horizontale, chargé d'une manière uniforme suivant sa projection AB (fig. 8), et portant un poids sur le milieu de sa longueur. Ce cas a été traité par NAVIER dans son ouvrage sur les *Ponts suspendus*, et nous aurons ainsi occasion de comparer notre méthode à celle suivie par ce Géomètre.

Y

Soit donc AMB le fil en question; Π le poids placé au milieu de M. Nous désignerons par x, y les coordonnées courantes horizontales et verticales de la portion AM du fil, et par x_1 et y_1 les coordonnées de l'autre portion MB; AX et AY sont les deux axes auxquels elles se rapportent.

Nous représenterons par h la distance $AC=CB$, et par p le poids distribué uniformément sur l'unité de longueur de la droite AB.

Nous accentuerons les coordonnées précédentes pour indiquer ce qu'elles deviennent, après un temps t, pendant le mouvement.

Soit T la tension qui a lieu en un point m du fil, les équations d'équilibre de l'élément du fil mn seront

$$(222)\ \ldots\ldots \qquad d.T\frac{dx}{ds}=0\ ; \qquad d.T\frac{dy}{ds}+p\,dx=0\ .$$

Si (pour nous servir de la notation de NAVIER), nous représentons par Q' la composante horizontale de la tension, composante qui est constante pour tous les points du fil, on aura

$$(223)\ \ldots\ldots \qquad T\frac{dx}{ds}=Q'\ ; \quad \text{d'où} \quad T=Q'\frac{ds}{dx}\ ,$$

d'où l'on déduit, pour l'équation différentielle de la courbe en état d'équilibre,

$$d.Q'\frac{dy}{dx}+p\,dx=0\ ,$$

ou bien

$$(224)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p}{Q'}=0\ .$$

Désignons par $y^{(M)}$ l'ordonnée du point M; nous aurons pour ce point

$$2Q'\frac{dy^{(M)}}{dx}=\Pi\ ,$$

ou bien

$$(225)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{dy^{(M)}}{dx}=\frac{\Pi}{2Q'}\ .$$

Des équations (224) et (225) on déduit facilement, eu égard à la condition de $y=0$ pour $x=0$,

$$(226)\ \ldots\ldots\ldots \qquad y=\frac{2ph+\Pi}{2Q'}x-\frac{p}{2Q'}x^2,$$

équation qui, dans l'état d'équilibre, s'étend à toute la portion de fil comprise entre A et M; comme l'autre portion est symétrique on aura l'équation correspondante en changeant, dans cette dernière, x en $2h-x_1$, ce qui donnera :

$$(227)\ \ldots\ldots \qquad y_1=\frac{\Pi}{2Q'}(2h-x_1)+\frac{phx_1}{Q'}-\frac{px_1^2}{2Q'}\ ,$$

équation qui s'applique à la partie du fil comprise entre les points M et B.

Considérons actuellement le fil en état de mouvement; représentons par g la gravité; la masse dont est chargée l'élément de fil mn de longueur ds étant $\frac{p\,dx}{g}$, nous aurons, pour équation du mouvement de la portion de fil AM,

$$(228)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} d.T\dfrac{dx'}{ds}-\dfrac{p\,dx}{g}\cdot\dfrac{d^2x'}{dt^2}=0\ ; \\ d.T\dfrac{dy'}{ds}+p\,dx-\dfrac{p\,dx}{g}\cdot\dfrac{d^2y'}{dt^2}=0\ . \end{cases}$$

On peut admettre que, pendant toute la durée du mouvement, la tension de chaque élément du fil reste la même que dans l'état d'équilibre; ainsi l'on aura encore

$$Q'=T\frac{dx}{ds}\ ,$$

et en prenant dx pour différentielle constante, les équations du mouvement deviendront

$$(229)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} Q'\dfrac{d^2x'}{dx^2}=\dfrac{p}{g}\cdot\dfrac{d^2x'}{dt^2}\ ; \\ p+Q'\dfrac{d^2y'}{dx^2}=\dfrac{p}{g}\cdot\dfrac{d^2y'}{dt^2}\ . \end{cases}$$

Pour le point M on aura les équations de condition suivantes:

$$(230)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \dfrac{\Pi}{g}\cdot\dfrac{d^2x'^{(M)}}{dt^2}=-Q'.\left\{\dfrac{dx'^{(M)}}{dx}-\dfrac{dx_1'^{(M)}}{dx_1}\right\}\ , \\ \dfrac{\Pi}{g}\cdot\dfrac{d^2y'^{(M)}}{dt^2}=\Pi-Q'.\left\{\dfrac{dy'^{(M)}}{dx}+\dfrac{dy_1'^{(M)}}{dx_1}\right\}\ . \end{cases}$$

L'on aurait pour l'autre portion de la courbe MB des équations analogues à celles (229). Les autres équations de condition sont:

$$(231)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \left.\begin{matrix} y'=0 \\ x'=0 \end{matrix}\right\}\ \text{pour } x=0\ ; \qquad \left.\begin{matrix} y_1'=0 \\ x_1'=2h \end{matrix}\right\}\ \text{pour } x=2h\ ; \\ \left.\begin{matrix} x'=x_1' \\ y'=y_1' \end{matrix}\right\}\ \text{pour } x=x_1=h\ . \end{cases}$$

Comme nous avons pris dx pour différentielle constante, on aura $d^2x=0$; $d^2x_1=0$; on aura également $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, puisque y correspond à l'état d'équilibre. Cela étant, en ayant égard aux équations (224) et (225), les équations (229) et (230) pourront se transformer comme il suit :

$$(232)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} Q'.\dfrac{d^2.(x'-x)}{dx^2}=\dfrac{p}{g}.\dfrac{d^2.(x'-x)}{dt^2}\ ; \\ Q'.\dfrac{d^2.(y'-y)}{dx^2}=\dfrac{p}{g}.\dfrac{d^2.(y'-y)}{dt^2}\ ; \end{cases}$$

$$(233)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \dfrac{\Pi}{g}.\dfrac{d^2.(x'^{(M)}-x^{(M)})}{dt^2} \\ =-Q'.\left\{\dfrac{d.(x'^{(M)}-x^{(M)})}{dx}-\dfrac{d.(x_1'^{(M)}-x_1^{(M)})}{dx_1}\right\}\ ; \\ \dfrac{\Pi}{g}.\dfrac{d^2.(y'^{(M)}-y^{(M)})}{dt^2} \\ =-Q'.\left\{\dfrac{d.(y'^{(M)}-y^{(M)})}{dx}+\dfrac{d.(y_1'^{(M)}-y_1^{(M)})}{dx_1}\right\}. \end{cases}$$

On aura, pour l'autre portion du fil MB, des équations analogues à celles (232); il faudra encore y ajouter les équations de condition suivantes, qui se déduisent de celles (231), savoir

$$(234)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \left.\begin{matrix} y'-y=0 \\ x'-x=0 \end{matrix}\right\} \text{ pour } x=0\ ; \\ \left.\begin{matrix} y_1'-y_1=0 \\ x_1'-x_1=0 \end{matrix}\right\} \text{ pour } x_1=2h\ ; \\ \left.\begin{matrix} x'-x=x_1'-x_1 \\ y'-y=y_1'-y_1 \end{matrix}\right\} \text{ pour } x=x_1=h\ . \end{cases}$$

Au moyen de ces équations l'on a tous les éléments nécessaires pour la solution complète du problème. Nous pouvons également en conclure que les oscillations horizontales du fil sont indépendantes de ses oscillations verticales.

38. Il serait facile, d'après les considérations précédentes, d'étendre la solution du problème au cas où le fil serait composé de plusieurs parties hétérogènes et chargé de poids sur divers de ses points; mais nous nous bornerons à résoudre la question spécialement traitée par NAVIER, dans laquelle ce Géomètre suppose que les deux parties du fil restent symétriques pendant toute la durée du mouvement. Nous examinerons seulement les oscillations verticales, car les formules qu'on déduit pour celles-ci, s'appliquent également, *mutatis mutandis*, aux oscillations horizontales.

La deuxième équation (232) fournit la valeur

$$y' - y = \Sigma . X \sin.(kt + \varepsilon) ,$$

et par suite

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 \frac{p}{gQ'} X = 0 .$$

D'où l'on déduit

$$X = A \sin.\left\{ k \sqrt{\frac{p}{gQ'}} . x + a \right\} ,$$

et par suite

$$(235) \quad \ldots\ldots y' - y = \Sigma . A \sin.\left(k \sqrt{\frac{p}{gQ'}} . x + a \right) \sin.(kt + \varepsilon) .$$

La deuxième équation (233) donnera, en supposant le fil symétrique de part et d'autre du point M;

$$(236) \quad \ldots\ldots k \text{ tang.}\left(k \sqrt{\frac{p}{gQ'}} . h + a \right) - \frac{2\sqrt{pgQ'}}{\Pi} = 0 .$$

En vertu de la première équation de condition (234), on aura évidemment $a = 0$; si, pour nous en tenir à la notation de NAVIER, nous faisons $k \sqrt{\frac{p}{gQ'}} = m$, les équations (235) et (236) deviendront :

$$(237) \quad \ldots\ldots y' - y = \Sigma . A \sin. mx \sin.\left(m \sqrt{\frac{gQ'}{p}} t + \varepsilon \right) ;$$

$$(238) \quad \ldots\ldots \qquad mh . \text{tang.} mh = \frac{2ph}{\Pi} .$$

Cette dernière équation servira à déterminer les valeurs de m.

Si l'on représente par φx et ψx les valeurs initiales de $y'-y$ et $\frac{d.(y'-y)}{dt}$, on aura, pour $A\sin.\varepsilon$ et $A\cos.\varepsilon$, les expressions suivantes:

$$A\sin.\varepsilon=\frac{\frac{\Pi}{g}\varphi h.\sin.mh+\frac{2p}{g}\int_0^h\varphi x\sin.mx\,dx}{\frac{\Pi}{g}\sin.^2mh+\frac{p}{g}\left(h-\frac{1}{m}\sin.mh.\cos.mh\right)};$$

$$A\cos.\varepsilon=\frac{1}{m}.\sqrt{\frac{p}{gQ'}}.\frac{\frac{\Pi}{g}\psi h.\sin.mh+\frac{2p}{g}\int_0^h\psi x\sin.mx\,dx}{\frac{\Pi}{g}\sin.^2mh+\frac{p}{g}\left(h-\frac{1}{m}\sin.mh.\cos.mh\right)}.$$

Mais, en vertu de l'équation (238), on a:

$$\frac{\Pi}{g}.\sin.mh=\frac{2p\cos.mh}{gm},$$

et

$$\frac{\Pi}{g}.\sin.^2mh-\frac{p}{gm}.\sin.mh.\cos.mh=\frac{1}{2}.\frac{p}{gm}.\sin.2mh.$$

Ainsi les expressions de $A\sin.\varepsilon$ et $A\cos.\varepsilon$ deviendront:

$$(239)\begin{cases}A\sin.\varepsilon=\frac{4}{2mh+\sin.2mh}\left\{\varphi h.\cos.mh+m\int_0^h\varphi x.\sin.mx\,dx\right\};\\ A\cos.\varepsilon=\frac{4}{m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\{2mh+\sin.2mh\}}\left\{\psi h.\cos.mh+m\int_0^h\psi x.\sin.mx\,dx\right\}.\end{cases}$$

Ces formules coïncident avec celles de NAVIER (voir page 163 de son *Traité sur les ponts suspendus*); B et C y représentent respectivement $A\sin.\varepsilon$ et $A\cos.\varepsilon$. Pour arriver à ces formules, ce Géomètre commence par établir les équations:

$$\varphi x=\Sigma.B\sin.mx,$$

$$\psi x=\Sigma.Cm\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\sin.mx,$$

dans lesquelles le signe sommataire Σ. s'étend à toutes les diverses valeurs de m déduites de l'équation (238). Il différentie ces expressions, puis il les intègre, après les avoir multipliées par $\cos. m'x.dx$; m' étant une des valeurs de m déduites de l'équation (238). Cela posé, il a

$$\int_0^h \cos. m'x . \frac{d\varphi x}{dx} . dx = \Sigma . mB \int_0^h \cos. mx . \cos. m'x . dx ;$$

$$\int_0^h \cos. m'x . \frac{d\psi x}{dx} . dx = \Sigma . m^2 C \sqrt{\frac{gQ'}{p}} . \int_0^h \cos. mx . \cos. m'x . dx ;$$

puis, en ayant égard à l'équation de condition (238), il démontre que, lorsque m et m' sont deux valeurs différentes, on a :

$$\int_0^h \cos. mx . \cos. m'x . dx = 0 ,$$

de sorte que le deuxième membre de chacune des équations précédentes se réduit à un seul terme qui correspond à $m' = m$; d'où l'on conclut que

$$\int_0^h \cos. mx . \frac{d\varphi x}{dx} . dx = Bm \int_0^h \cos.^2 mx . dx = B \frac{2mh + \sin. 2mh}{4} .$$

En intégrant par parties, et divisant par $\frac{2mh + \sin. 2mh}{4}$, on aura

$$B = \frac{4}{2mh + \sin. 2mh} \left\{ \varphi h . \cos. mh + m \int_0^h \varphi x . \sin. mx . dx \right\} ;$$

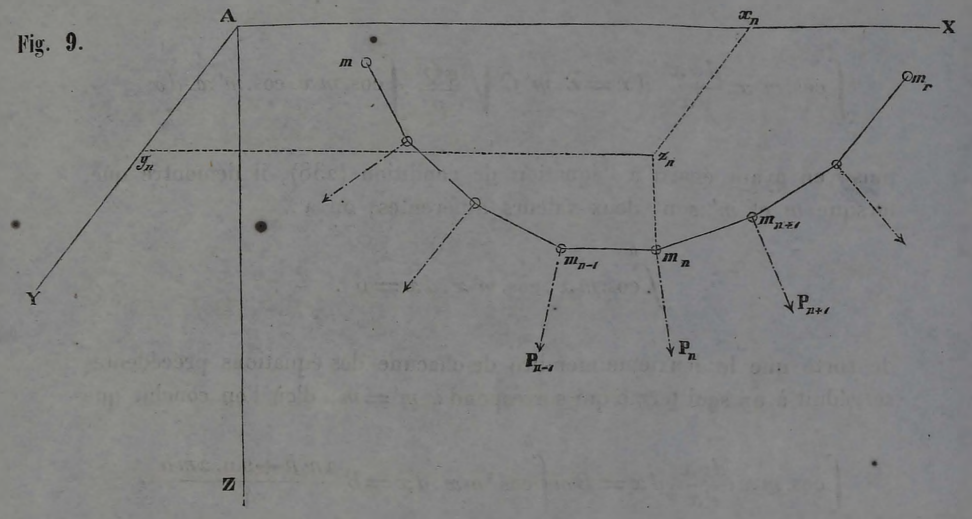
on obtient pour C une expression analogue.

On peut se convaincre, par cet exemple, combien ce dernier procédé, qui est généralement suivi par les Géomètres, est moins simple et moins direct que celui que nous avons adopté d'une manière générale pour tous les problèmes.

§ VII.

Vibrations d'un polygone funiculaire formé d'éléments flexibles et extensibles.

Fig. 9.



39. Soit (fig. 9) un polygone $m \ldots, m_{n-1}, m_n, m_{n+1} \ldots, m_r$ formé d'un fil flexible et extensible; désignons par $m, m_{n-1}, m_n, m_{n+1} \ldots, m_r$ les masses placées à chacun des sommets de ce polygone et par $P \ldots, P_{n-1}, P_n, P_{n+1} \ldots, P_r$ les forces qui les sollicitent; nous rapporterons chacun des sommets de ce polygone à trois axes orthogonaux AX, AY, AZ; leurs coordonnées, dans l'état d'équilibre, seront respectivement $(x, y, z) \ldots\ldots$; $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \ldots\ldots$; (x_n, y_n, z_n); $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \ldots\ldots\ldots$; (x_r, y_r, z_r).

Nous accentuerons ces coordonnées pour indiquer ce qu'elles deviennent pendant le mouvement; les longueurs des éléments $mm_1 \ldots\ldots$; m_{n-1}, m_n; $m_n, m_{n+1} \ldots\ldots$ etc.; du polygone, dans l'état d'équilibre, seront représentées respectivement par $l \ldots, l_{n-1}, l_n$; et nous désignerons par $T \ldots, T_{n-1}, T_n$ les tensions correspondantes. Pendant le mouvement ces quantités deviendront respectivement $l+\lambda, \ldots\ldots,$

$l_{n-1}+\lambda_{n-1}$, $l_n+\lambda_n$ ....., $T+\tau$ ....., $T_{n-1}+\tau_{n-1}$, $T_n+\tau_n$ ..... Nous appellerons (φ, ψ, θ) .... $(\varphi_n, \psi_n, \theta_n)$ .... etc. et $(\varphi', \psi', \theta')$ .... $(\varphi_n', \psi_n', \theta_n')$ .... les angles que font, avec les axes des coordonnées, les directions respectives des forces P ...., P_n etc. dans l'état d'équilibre et pendant le mouvement.

Cela posé, si nous considérons la masse m_n, nous aurons, pour les équations différentielles de son mouvement,

$$(240)\ldots\quad\begin{cases} m_n.\dfrac{d^2.x'_n}{dt^2}=(T_n+\tau_n)\dfrac{x'_{n+1}-x'_n}{l_n+\lambda_n} \\ \qquad -(T_{n-1}+\tau_{n-1})\dfrac{x'_n-x'_{n-1}}{l_{n-1}+\lambda_{n-1}}+P_n\cos.\varphi'_n\ ; \\ m_n.\dfrac{d^2.y'_n}{dt^2}=(T_n+\tau_n)\dfrac{y'_{n+1}-y'_n}{l_n+\lambda_n} \\ \qquad -(T_{n-1}+\tau_{n-1})\dfrac{y'_n-y'_{n-1}}{l_{n-1}+\lambda_{n-1}}+P_n\cos.\psi'_n\ ; \\ m_n.\dfrac{d^2.z'_n}{dt^2}=(T_n+\tau_n)\dfrac{z'_{n+1}-\lambda'_n}{l_n+\lambda_n} \\ \qquad -(T_{n-1}+\tau_{n-1})\dfrac{\lambda'_n-\lambda'_{n-1}}{l_{n-1}+\lambda_{n-1}}+P_n\cos.\theta'_n\ . \end{cases}$$

Examinons plus spécialement la première de ces équations. La différence x'_n-x_n entre les abscisses du point m_n, pendant le mouvement, et dans l'état d'équilibre, se compose de deux parties; la première due au mouvement du polygone, supposé composé d'éléments inextensibles; et la seconde provenant des allongements qui ont lieu dans chacun des éléments de ce polygone; désignons par a, a_1, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}... les accroissements des abscisses dus à la première de ces causes; par α l'accroissement de l'abscisse x provenant de l'extension des éléments polygonaux; soient ω..., ω_{n-1}..., ω_n etc. les angles que les côtés l..., l_{n-1}..., l_n... etc. font avec l'axe des x; comme tous les mouvements sont supposés très-petits, l'on aura sensiblement

$$x'_n=x_n+a_n+\alpha+\lambda\cos.\omega+\lambda_1\cos.\omega_1+\ldots\ldots+\lambda_{n-1}\cos.\omega_{n-1}\ ;$$

en faisant en outre $\varphi'_n=\varphi_n+\eta_n$, la première des équations (240) deviendra :

$$(241)\ldots\quad m_n.\frac{d^2.\{a_n+\alpha+\lambda\cos.\omega+\lambda_1\cos\omega_1.\ldots.+\lambda_{n-1}\cos.\omega_{n-1}\}}{dt^2}$$

$$=(T_n+\tau_n)\frac{x_{n+1}-x_n+a_{n+1}-a_n+\lambda_n\cos.\omega_n-\lambda_{n-1}\cos.\omega_{n-1}}{l_n+\lambda_n}$$

$$-(T_{n-1}+\tau_{n-1})\frac{x_n-x_{n-1}+a_n-a_{n-1}+\lambda_{n-1}\cos.\omega_{n-1}-\lambda_{n-2}\cos.\omega_{n-2}}{l_{n-1}+\lambda_{n-1}}$$

$$+P_n\{\cos.\varphi_n-\eta_n\sin.\varphi_n\}\ .$$

Comme les quantités a_0, $\alpha\ldots.\lambda\ldots.\lambda_n$, τ_{n-1}, τ_n, η sont très-petites, on négligera leurs doubles produits; en outre l'on a, relativement à la position d'équilibre,

$$T_n.\frac{x_{n+1}-x_n}{l_n}-T_{n-1}\frac{x_n-x_{n-1}}{l_{n-1}}+P_n\cos.\varphi_n=0\ ;$$

cela étant, si l'on observe que, en général,

$$\cos.\omega_n=\frac{x_{n+1}-x_n}{l_n}\ ,$$

l'équation (241) deviendra:

$$(242)\ldots..\quad m_n.\frac{d^2.\{a_n+\alpha+\lambda\cos.\omega.\ldots.+\lambda_{n-1}\cos.\omega_{n-1}\}}{dt^2}$$

$$=T_n.\frac{a_{n+1}-a_n}{l_n}-T_{n-1}\frac{a_n-a_{n-1}}{l_{n-1}}$$

$$-T_n.\frac{\lambda_{n-1}}{l_n}\cos.\omega_{n-1}+T_{n-1}\frac{\lambda_{n-2}}{l_{n-1}}\cos.\omega_{n-2}$$

$$+\tau_n.\cos.\omega_n-\tau_{n-1}\cos.\omega_{n-1}-P_n\eta_n\sin.\varphi_n\ .$$

Comme a_n, a_{n+1}, etc. sont les augmentations de coordonnées dues aux oscillations du polygone dans le cas où les côtés sont supposés inextensibles et pour lesquels les tensions respectives restent constantes, on aura, par conséquent:

$$(243)\ldots m_n.\frac{d^2.a_n}{dt^2}=T_n\frac{a_{n+1}-a_n}{l_n}-T_{n-1}\frac{a_n-a_{n-1}}{l_{n-1}}-P_n\eta_n\sin.\varphi_n\ ;$$

Ainsi l'équation (242) se réduit à

$$(244)\ \ldots\ldots \quad m_n \cdot \frac{d^2.\{\alpha + \lambda \cos.\omega \ldots + \lambda_{n-1} \cos.\omega_{n-1}\}}{dt^2}$$

$$= \tau_n \cos.\omega_n - \tau_{n-1} \cos.\omega_{n-1} - T_n \frac{\lambda_{n-1}}{l_n} \cos.\omega_n + T_{n-1} \frac{\lambda_{n-2}}{l_{n-1}} \cos.\omega_{n-1} .$$

Représentons par ε_{n-1}, ε_n, etc. les efforts qui seraient nécessaires pour allonger les côtés l_{n-1}, l_n, etc. d'une quantité égale à leurs longueurs primitives, ou, en d'autres termes, soient ε_{n-1}, ε_n les modules d'élasticité des côtés l_{n-1}, l_n, rapportés à leurs sections respectives, on aura, en vertu de la loi de la résistance des prismes à l'allongement,

$$(245)\ \ldots\ldots \quad \tau_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}} ; \qquad \tau_n = \varepsilon_n \frac{\lambda_n}{l_n} ; \qquad \text{etc.}$$

Observons que ε_n, ε_{n-1} sont des quantités très-grandes relativement à T_n, T_{n-1}. Si, par exemple, le côté l_n est un fil de fer de section égale à *un* millimètre quarré, on a moyennement $\varepsilon_n = 18000$ kilogr., tandis que la plus grande tension que peut supporter ce fil, sans que son élasticité soit altérée, ne dépasse pas 15 kilogrammes; d'où l'on peut conclure qu'il est permis de négliger les deux derniers termes du second membre de l'équation (244), relativement aux deux premiers, lorsque les rapports $\frac{\lambda_{n-2}}{l_{n-2}}$, $\frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}}$, $\frac{\lambda_n}{l_n}$, pour les côtés contigus, ne diffèrent pas notablement entr'eux.

Ainsi, en introduisant les relations (245), on réduira l'équation (244) à la suivante:

$$(246)\ \ldots\ldots \quad m_n \cdot \frac{d^2.\{\alpha + \lambda \cos.\omega \ldots + \lambda_{n-1} \cos.\omega_{n-1}\}}{dt^2}$$

$$= \varepsilon_n \cdot \frac{\lambda_n}{l_n} \cos.\omega_n - \varepsilon_{n-1} \frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}} \cos.\omega_{n-1} .$$

L'on aura de même

$$m_{n-1} \frac{d^2.\{\alpha + \lambda \cos.\omega \ldots + \lambda_{n-2} \cos.\omega_{n-2}\}}{dt^2}$$

$$= \varepsilon_{n-1} \frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}} \cos.\omega_{n-1} - \varepsilon_{n-2} \frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}} \cos.\omega_{n-2} ;$$

en soustrayant, membre à membre, cette équation de la précédente, après les avoir respectivement divisées par m_{n-1} et m_n, on aura :

$$(247)\ldots\quad \frac{d^2.\lambda_{n-1}}{dt^2}\cos.\omega_{n-1} = \frac{\varepsilon_n}{m_n}.\frac{\lambda_n}{l_n}\cos.\omega_n - \left\{\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}}\right\}\varepsilon_{n-1}\frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}}\cos.\omega_{n-1}$$
$$+\frac{\varepsilon_{n-2}}{m_{n-1}}.\frac{\lambda_{n-2}}{l_{n-2}}\cos.\omega_{n-2}\ .$$

Si l'on désigne par ω'_{n-1}, et ω''_{n-1} les angles que le côté l_{n-1} du polygone fait avec les axes des y et des z, on aura deux autres équations qu'on déduira de la précédente, en y changeant simplement ω en ω' et ω''. Cela posé, en multipliant la première (247) par $\cos.\omega_{n-1}$, la deuxième par $\cos.\omega'_{n-1}$, et la troisième par $\cos.\omega''_{n-1}$, puis les sommant et désignant par θ_n et θ_{n-2} les angles que le côté l_{n-1} fait avec les deux autres contigus l_n et l_{n-2}, il viendra :

$$(248)\ldots\quad \frac{d^2.\lambda_{n-1}}{dt^2} = \frac{\varepsilon_n}{m_n}.\frac{\lambda_n}{l_n}\cos.\theta_n - \left\{\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}}\right\}\varepsilon_{n-1}\frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}}$$
$$+\frac{\varepsilon_{n-2}}{m_{n-1}}.\frac{\lambda_{n-2}}{l_{n-2}}.\cos.\theta_{n-2}\ .$$

On aura des équations analogues pour les autres côtés du polygone.

40. Supposons que le polygone se réduise à un fil homogène ; en désignant par $d\varsigma$ l'élément de ce fil, par $d\sigma$ la quantité dont s'est allongé cet élément à un instant déterminé, par $\rho\, d\varsigma$ la masse élémentaire du fil, et observant que

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2} = \varepsilon\ , \qquad \cos.\theta_n = \cos.\theta_{n-2} = 1\ ,$$

l'équation précédente donnera

$$\frac{d^2.\lambda_{n-1}}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\rho\, d\varsigma}.\left\{\frac{\lambda_n}{l_n} - 2\frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{\lambda_{n-2}}{l_{n-2}}\right\} = \frac{\varepsilon}{\rho\, d\varsigma}\Delta^2.\frac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}}\ .$$

En observant que $\dfrac{\lambda_{n-1}}{l_{n-1}} = \dfrac{d\sigma}{d\varsigma}$, puis changeant Δ en d, dans le dernier membre de cette équation, et divisant par $d\varsigma$, il viendra

(249) ..... $$\frac{d^2.\frac{d\sigma}{d\varsigma}}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\rho}.\frac{d^2.\frac{d\sigma}{d\varsigma}}{d\varsigma^2}.$$

Il sera facile, d'après ce qui a été exposé, d'obtenir les valeurs de λ, et de $\frac{d\sigma}{d\varsigma}$, et d'étendre la solution du problême, au cas où le fil serait composé de parties hétérogènes et chargé de masses reparties sur divers de ses points.

§ VIII.

Vibrations transversales d'une verge élastique, composée de diverses parties hétérogènes.

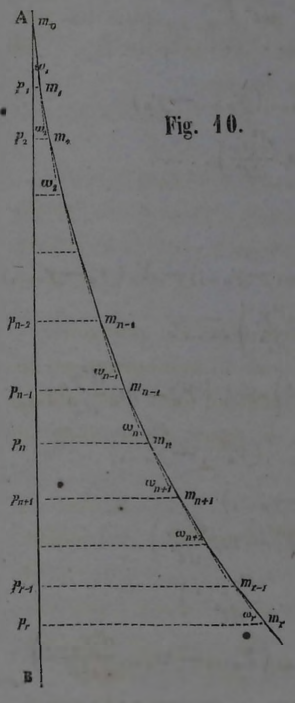


Fig. 10.

41. Afin de n'avoir pas à considérer la résistance à la torsion, nous supposerons que la verge étant primitivement rectiligne, ses vibrations aient lieu dans un même plan. AB (fig. 10) représente la position d'équilibre de la verge, et $Am_1 \ldots m_n \ldots m_r$ sa position pendant le mouvement correspondante au temps t. Pour généraliser le problême, nous supposerons la verge composée d'éléments polygonaux, et chargée, dans leurs points de jonctions, de masses $m_1 \ldots m_n \ldots m_r$. Chaque élément de la verge tend à reprendre sa position rectiligne avec une force proportionnelle à l'angle qu'il fait avec l'élément contigu. Soient: $E_1 \ldots E_n \ldots E_r$ des coefficients dépendants de l'élasticité et du système d'union de chaque élément avec son contigu; $\omega_1 \ldots \omega_n \ldots \omega_r$ les arcs des angles que font respectivement les éléments $\overline{m_0 m_1} \ldots \overline{m_{n-1} m_n} \ldots \overline{m_{r-1} m_r}$ avec ceux qui les précèdent; $l_1 \ldots l_n \ldots l_r$ les longueurs respectives de ces éléments: les moments de leurs résistances élastiques pourront être exprimés par $E_1\frac{\omega_1}{l_1} \ldots E_n\frac{\omega_n}{l_n} \ldots E_r\frac{\omega_r}{l_r}$.

Désignons par $y_1 \dots y_n \dots y_r$ les ordonnées correspondantes aux points $m_1 \dots m_n \dots m_r$; par $X_1 \dots X_n \dots X_r$ et $Y_1 \dots Y_n \dots Y_r$ les composantes, dans le sens de AB et de sa perpendiculaire, des forces appliquées à ces mêmes points. Cela posé, il est clair que le moment de la résistance élastique correspondant à un point quelconque de la verge, devra faire équilibre à la somme des moments des forces perdues appliquées à chacun des points qui précèdent celui en question.

Or, comme l'on ne considère que les vibrations transversales, et qu'on suppose que la verge s'écarte fort peu de sa position d'équilibre, il sera facile de voir que l'on aura, pour déterminer le mouvement des divers points de la verge, les équations suivantes :

$$
(250)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_r \frac{\omega_r}{l_r} = -X_r(y_r - y_{r-1}) + l_r\left(Y_r - m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2}\right) ;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;\\
&E_{n+1} \frac{\omega_{n+1}}{l_{n+1}} = -X_r(y_r - y_n) \dots\dots - X_{n+1}(y_{n+1} - y_n)\\
&\qquad + (l_r + l_{r-1} \dots\dots + l_{n+1})\left(Y_r - m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2}\right) \dots\dots\\
&\qquad + l_{n+1}\left(Y_{n+1} - m_{n+1} \frac{d^2 y_{n+1}}{dt^2}\right) ;\\
&E_n \frac{\omega_n}{l_n} = -X_r(y_r - y_{n-1}) \dots\dots - X_{n+1}(y_{n+1} - y_{n-1}) - X_n(y_n - y_{n-1})\\
&\qquad + (l_r \dots\dots + l_{n+1} + l_n)\left(Y_r - m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2}\right) \dots\dots\\
&\qquad + (l_{n+1} + l_n)\left(Y_{n+1} - m_{n+1} \frac{d^2 y_{n+1}}{dt^2}\right) + l_n\left(Y_n - m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2}\right) ;\\
&E_{n-1} \frac{\omega_{n-1}}{l_{n-1}} = -X_r(y_r - y_{n-2}) \dots - X_{n+1}(y_{n+1} - y_{n-2})\\
&\qquad - X_n(y_n - y_{n-2}) - X_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2})\\
&\qquad + (l_r \dots\dots + l_{n+1} + l_n + l_{n-1})\left(Y_r - m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2}\right) \dots\dots\\
&\qquad + (l_{n+1} + l_n + l_{n-1})\left(Y_{n+1} - m_{n+1} \frac{d^2 y_{n+1}}{dt^2}\right)\\
&\qquad + (l_n + l_{n-1})\left(Y_n - m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2}\right) + l_{n-1}\left(Y_{n-1} - m_{n-1} \frac{d^2 y_{n-1}}{dt^2}\right) ;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;\\
&E_1 \frac{\omega_1}{l_1} = -X_r(y_r - y_0) \dots\dots - X_1(y_1 - y_0)\\
&+ (l_r \dots\dots + l_1)\left(Y_r - m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2}\right) \dots\dots + l_1\left(Y_1 - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) .
\end{aligned}
\right.
$$

De ces équations l'on déduit :

$$(251)\ \ldots\ldots\quad E_{n+1}\frac{\omega_{n+1}}{l_{n+1}}-2E_n\frac{\omega_n}{l_n}+E_{n-1}\frac{\omega_{n-1}}{l_{n-1}}$$

$$=(y_n-2y_{n-1}+y_{n-2})(X_r+X_{r-1}\ldots\ldots+X_n)-X_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})$$

$$-(l_n-l_{n-1})\left(Y_r\ldots\ldots+Y_n-m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}\ldots\ldots-m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}\right)$$

$$+l_{n-1}\left(Y_{n-1}-m_{n-1}\frac{d^2y_{n-1}}{dt^2}\right).$$

En employant la notation des différences finies, cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$(252)\ \ldots\ldots\quad \Delta^2.E_{n-1}\frac{\omega_{n-1}}{l_{n-1}}=\Delta^2.y_{n-2}.\sum_{n-1}^{r}.X-\Delta y_{n-2}.X_{n-1}$$

$$-\Delta.l_{n-1}.\sum_{n-1}^{r}.\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)+l_{n-1}\left(Y_{n-1}-m_{n-1}\frac{d^2y_{n-1}}{dt^2}\right).$$

Afin d'exprimer ω_{n-1} au moyen des ordonnées correspondantes, on observera que l'arc ω_{n-1} est la différence des arcs correspondants aux angles que font, avec l'axe AB, les deux éléments l_{n-1} et l_{n-2} de la verge; or ces arcs sont respectivement égaux à

$$\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{l_{n-1}}\quad\text{et}\quad\frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{l_{n-2}};$$

d'où l'on conclut

$$(253)\ \ldots\ldots\quad \omega_{n-1}=\frac{y_{n-1}}{l_{n-1}}-y_{n-2}\left(\frac{1}{l_{n-1}}+\frac{1}{l_{n-2}}\right)+\frac{y_{n-3}}{l_{n-2}}.$$

En substituant cette valeur et ses analogues, dans les équations précédentes, on aura les équations du mouvement du système qui ne contiendront plus que les variables indépendantes $y_1\ldots\ldots y_n\ldots\ldots y_r$ et leurs deuxièmes coefficients différentiels pris par rapport au temps.

Observons que $\sum_{n-1}^{r}.X$ est égal à la tension qui a lieu dans l'élément l_n; que X_{n-1} indique, par conséquent, la différence entre la tension de l'élément l_n et celle de l'élément l_{n-1}; cela posé, si l'on représente $\sum_{n-1}^{r}.X$ par T_n, l'équation (252) prendra la forme suivante :

$$(254)\ \ldots\quad \Delta^2.E_{n-1}\frac{\omega_{n-1}}{l_{n-1}}=\Delta^2y_{n-2}.T_n-\Delta.y_{n-1}.\Delta.T_{n-1}$$

$$-\Delta l_{n-1}.\sum_{n-1}^{r}.\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)+l_{n-1}\left(Y_{n-1}-m_{n-1}\frac{d^2y_{n-1}}{dt^2}\right).$$

42. On supposera tous les éléments de la verge de longueur égale à l; la tension constante et égale à T, et toutes les forces Y nulles; ainsi l'équation précédente se réduira à

$$\Delta^2.E_{n-1}\frac{\omega_{n-1}}{l}=\Delta^2.y_{n-2}.T-m_{n-1}.\frac{d^2y_{n-1}}{dt^2}\,l$$

qui, en y mettant pour ω_{n-1} sa valeur, devient

$$(255)\ \ldots\quad \Delta^2.\left(\frac{E_{n-1}}{l^2}.\Delta^2.y_{n-3}\right)=\Delta^2.y_{n-2}.T-m_{n-1}.\frac{d^2y_{n-1}}{dt^2}\,l\,.$$

De cette équation aux différences finies, l'on passe facilement à l'équation différentielle du mouvement de la verge élastique continue. Pour cela, représentons par dx l'élément l, par μds la masse élémentaire m_{n-1}; supposons en outre que la section de la verge, ainsi que le coefficient d'élasticité, soient uniformes pour toute l'étendue de la verge, on aura, en changeant les différences finies en différentielles et en divisant par dx^2,

$$(256)\ \ldots\ldots\quad E\frac{d^4y}{dx^4}=T\frac{d^2y}{dx^2}-\mu\frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

En appliquant la méthode suivie jusqu'à présent, l'on fera

$$(257)\ \ldots\ldots\quad y=\Sigma.V\sin.(kt+\varepsilon)\,,$$

où le signe $\Sigma.$ indique la somme des différents termes correspondants aux diverses valeurs de k, et V une fonction de x et de k; x représente la distance d'un point quelconque de la verge à l'origine que nous supposerons être le point A (fig. 10). Pour déterminer la fonction V, on déduit, de l'équation (256), la suivante :

$$(258)\ \ldots\ldots\quad E\frac{d^4V}{dx^4}=T\frac{d^2V}{dx^2}+k^2\mu V\,.$$

On satisfait à cette équation en prenant

(259) ..... $$V = Ae^{hx} ,$$

où e est la base des logarithmes hyperboliques, et A, h sont deux constantes à déterminer. En substituant, il viendra

(260) ..... $$Eh^4 = Th^2 + k^2\mu ,$$

équation qui donne

(261) ..... $$h = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{E} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{T^2}{E^2} + \frac{k^2\mu}{E}}} .$$

L'on voit que, de ces quatre valeurs de h, deux sont imaginaires ; en représentant par $+n$ et par $-n$ les deux valeurs réelles, et par $q\cdot\sqrt{-1}$ et $-q\cdot\sqrt{-1}$ les deux valeurs imaginaires de h (n et q exprimant des quantités réelles et positives), il est clair que la valeur de V se composera de la somme des quatre termes correspondant respectivement à chacune des précédentes racines : ainsi son expression sera

(262) ..... $$V = Ae^{nx} + Be^{-nx} + C\sin.qx + D\cos.qx ,$$

où A, B, C et D sont quatre constantes arbitraires.

Pour fixer les idées, supposons que l'axe AB soit vertical et que la verge soit encastrée à son extrémité supérieure, tandisque son extrémité inférieure est libre, et porte un poids $m_r g$ très-grand relativement à celui de la verge, m_r représentant sa masse et g la gravité ; on aura

$$T = m_r g .$$

Les équations de condition, relatives à l'extrémité supérieure, seront évidemment

(263) ..... $$y_0 = 0 ; \qquad \frac{dy_0}{dx} = 0 .$$

Pour l'extrémité inférieure, les équations (250) donnent

$$E_r\frac{\omega_r}{l_r} = -X_r(y_r - y_{r-1}) + l_r\left(Y_2 - m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}\right) ,$$

$$E_r\frac{\omega_r}{l_r} - E_{r-1}\frac{\omega_{r-1}}{l_{r-1}} = (y_{r-1} - y_{r-2})(X_r + X_{r-1})$$
$$- l_{r-1}\left\{Y_r + Y_{r-1} - m_r\frac{d^2y_r}{dt^2} - m_{r-1}\frac{d^2y_{r-1}}{dt^2}\right\} ;$$

d'où l'on déduit, pour le cas particulier que nous traitons, en négligeant les infiniment petits par rapport aux termes finis :

$$(264)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} E\dfrac{d^2y_r}{dx^2}=0\ ; \\ E\dfrac{d^3y_r}{dx^3}=m_r g\cdot\dfrac{dy_r}{dx}+m_r\dfrac{d^2y_r}{dt^2}\ . \end{cases}$$

En substituant, dans les équations précédentes, pour y_0 et y_r leurs valeurs, on aura :

$$(265)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} V_0=0\ ; \quad \dfrac{dV_0}{dx}=0\ ; \quad \dfrac{d^2V_r}{dx^2}=0\ ; \\ E\dfrac{d^3V_r}{dx^3}=m_r g\cdot\dfrac{dV_r}{dx}-m_r k^2 V_r\ . \end{cases}$$

En représentant par r la longueur de la verge, les équations précédentes donneront, en vertu de l'expression (262) de V:

$$(266)\ \ldots\ \begin{cases} A+B+D=0\ ; \\ nA-nB+qC=0\ ; \\ n^2\,(Ae^{nr}+Be^{-nr})-q^2(C\sin.qr+D\cos.qr)=0\ ; \\ E\left[n^3.(Ae^{nr}-Be^{-nr})-q^3(C.\cos.qr-D.\sin.qr)\right] \\ =m_r g\cdot\left\{nAe^{nr}-nBe^{-nr}+qC.\cos.qr-qD.\sin.qr\right\} \\ -m_r k^2.\left\{Ae^{nr}+Be^{-nr}+C.\sin.qr+D.\cos.qr\right\}\ . \end{cases}$$

Au moyen de ces quatre équations on en obtiendra facilement une cinquième qui ne contiendra aucune des constantes arbitraires A, B, C, D, mais seulement n et q; or comme ces deux dernières quantités sont exprimées en fonction de k^2 en vertu de l'équation (261), on voit que cette 5ème équation finale ne contiendra que k, et servira, par conséquent, à déterminer les différentes valeurs de cette quantité. Nous obtiendrons encore deux nouvelles équations relatives aux conditions initiales du mouvement. Ainsi, en désignant par β et $\overline{\beta}$ les valeurs initiales de y et $\dfrac{dy}{dt}$, on aura, en vertu des principes déjà développés,

$$(267)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \sin.\varepsilon = \dfrac{m_r V_r \beta_r + \mu \int_0^r V \beta\, dx}{m_r V_r^2 + \mu \int_0^r V^2\, dx}, \\ \cos.\varepsilon = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{m_r V_r \overline{\beta}_r + \mu \int_0^r V \overline{\beta}\, dx}{m_r V_r^2 + \mu \int_0^r V^2\, dx}. \end{cases}$$

Au moyen de ces deux équations, dans lesquelles on substituera pour V sa valeur, et des quatre équations (266), on déterminera les six constantes A, B, C, D, k et ε qui entrent dans la solution du problème.

43. Lorsque la masse m_r est nulle, ainsi que la tension, l'équation (261) donne

$$(268)\ \ldots\ldots\ n = q = k\sqrt{\frac{\mu}{E}},$$

et les équations (266) deviennent

$$(269)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} A + B + D = 0, \\ A - B + C = 0, \\ Ae^{nr} + Be^{-nr} - C.\sin.nr - D.\cos.nr = 0, \\ Ae^{nr} - Be^{-nr} - C.\cos.nr + D.\sin.nr = 0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$(270)\ \ldots\ldots\ (e^{nr} + e^{-nr})\cos.nr + 2 = 0.$$

Les formules (267) se réduisent à

$$(271)\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases} \sin.\varepsilon = \dfrac{\int_0^r V\beta\,dx}{\int_0^r V^2\,dx}, \\ \cos.\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\int_0^r V\overline{\beta}\,dx}{\int_0^r V^2\,dx}, \end{cases}$$

où l'on mettra pour V sa valeur

$$(272)\ \ldots\ldots\ V = Ae^{nx} + Be^{-nx} + C.\sin.nx + D.\cos.nx\ .$$

44. Supposons que la verge soit composée de deux parties différentes soudées ensemble, de longueurs respectives r' et r'', et portant, à l'extrémité inférieure, un poids $m''g$, et au point de jonction un poids $m'g$, tandisque l'extrémité supérieure est encastrée. Nous indiquerons avec les accents $'$ et $''$ les diverses quantités relatives aux deux parties de la verge.

On aura pour chacune de ces parties une équation analogue à celle (256) ce qui donnera :

$$(273)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} E'\dfrac{d^4.y'}{dx^4} = T'\dfrac{d^2.y'}{dx^2} - p'\dfrac{d^2.y'}{dt^2}\ , \\ E''\dfrac{d^4.y''}{dx^4} = T''\dfrac{d^2.y''}{dx^2} - p''\dfrac{d^2.y''}{dt^2}\ ; \end{cases}$$

où l'on a

$$(274)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} T' = (m'+m'')g\ ; \\ T'' = m''g\ . \end{cases}$$

Des équations (273) l'on déduit

$$(275)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} y' = \Sigma.V'\sin.(kt+\varepsilon)\ , \\ y'' = \Sigma.V''\sin.(kt+\varepsilon) \end{cases}$$

et, par suite,

$$(276)\ \ldots\ \begin{cases} V' = A' e^{n'x} + B' e^{-n'x} + C' \sin. q' x + D' \cos. q' x\ , \\ V'' = A'' e^{n''x} + B'' e^{-n''x} + C'' \sin. q'' x + D'' \cos. q'' x\ ; \end{cases}$$

équations dans lesquelles on a

$$(277)\ \ldots\ \begin{cases} n' = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{T'}{E'} + \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{T'^2}{E'^2} + \frac{k^2\mu'}{E'}}}\ , \\ q' = \sqrt{-\frac{1}{2}\cdot\frac{T'}{E'} + \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{T'^2}{E'^2} + \frac{k^2\mu'}{E'}}}\ , \end{cases}$$

et des valeurs analogues pour n'' et q''.

Les équations de conditions sont, pour les deux points extrêmes,

$$(278)\ \ldots\ \begin{cases} V'_o = 0\ ; \qquad \frac{dV'_o}{dx} = 0\ ; \\ \frac{d^2V''_{r''}}{dx} = 0\ ; \qquad E''\frac{d^3V''_{r''}}{dx^3} = m''g\frac{dV''_{r''}}{dx} - m''k^2V''_{r''}\ . \end{cases}$$

Quand au point de jonction, nous observerons que, pendant toute la durée du mouvement, les ordonnées des deux parties de la verge, doivent être égales et que, de plus, les deux éléments contigus doivent se maintenir tangents l'un à l'autre, puisque les deux portions de la verge sont soudées bout-à-bout; ainsi l'on aura

$$y'_{r'} = y''_{r'}\ ; \qquad \frac{dy'_{r'}}{dx} = \frac{dy''_{r'}}{dx}\ ,$$

ou bien

$$(279)\ \ldots\ \qquad V'_{r'} = V''_{r'}\ ; \qquad \frac{dV'_{r'}}{dx} = \frac{dV''_{r'}}{dx}\ .$$

Les équations (250) nous fournissent encore, pour ce point, deux autres équations que l'on déduit de la considération des deux éléments contigus qui comprennent entr'eux la masse m'. En négligeant les infiniment petits, par rapport aux quantités finies, l'on obtiendra

$$E'\frac{d^2y'_{r'}}{dx^2}=E''\frac{d^2y''_{r'}}{dx^2}\ ;$$

$$E'\frac{d^3y'_{r'}}{dx^3}-E''\frac{d^3y''_{r'}}{dx^3}=m'g\frac{dy'_{r'}}{dx}+m'\frac{d^2y'_{r'}}{dt^2}\ ,$$

équations qui conduisent aux suivantes :

$$(280)\ \ldots\ \begin{cases} E'\dfrac{d^2V'_{r'}}{dx^2}=E''\dfrac{d^2V''_{r'}}{dx^2}\ , \\ E'\dfrac{d^3V'_{r'}}{dx^3}-E''\dfrac{d^3V''_{r'}}{dx^3}=m'g\dfrac{dV'_{r'}}{dx}-m'k^2V'_{r'}\ . \end{cases}$$

Enfin l'on aura, en vertu des formules générales du § I.er,

$$(281)\ldots\begin{cases} \sin.\varepsilon=\dfrac{m'V'_{r'}\beta'_{r'}+m''V''_{r'}\beta''_{r'}+\mu'\displaystyle\int_0^{r'}V'\beta'dx+\mu''\int_{r'}^{r'+r''}V''\beta''dx}{m'V'^2_{r'}+m''V''^2_{r'}+\mu'\displaystyle\int_0^{r'}V'^2dx+\mu''\int_{r'}^{r'+r''}V''^2dx}\ , \\ \cos.\varepsilon=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{m'V'_{r'}\overline{\beta}'_{r'}+m''V''_{r'}\overline{\beta}''_{r'}+\mu'\displaystyle\int_0^{r'}V'\overline{\beta}'dx+\mu''\int_{r'}^{r'+r''}V''\overline{\beta}''dx}{m'V'^2_{r'}+m''V''^2_{r'}+\mu'\displaystyle\int_0^{r'}V'^2dx+\mu''\int_{r'}^{r'+r''}V''^2dx}\ . \end{cases}$$

Les équations de condition (278), (279), (280), (281) sont, au nombre de dix, égal à celui des constantes à déterminer A', B', C', D', A'', B'', C'', D'', k et ε ; par conséquent la solution du problème est complète.

§ IX.

Vibrations d'une membrane flexible, plane, rectangulaire, uniformément tendue et composée de deux parties de nature différente.

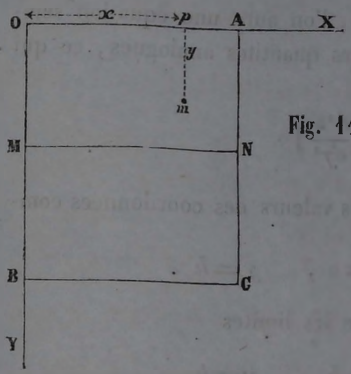


Fig. 11.

45. Soit $\overline{OACB}$ (fig. 11) la membrane rectangulaire composée de deux parties $\overline{OMNA}$ et $\overline{MNCB}$ séparées par une ligne $\overline{MN}$ parallèle au côté $\overline{OA}$; nous désignerons par x et y les coordonnées d'un point m de la membrane, rapportées à deux axes rectangulaires OX et OY, et par z l'ordonnée du même point perpendiculaire au plan de la membrane. Nous ferons

$$\overline{OA}=a\ ; \qquad \overline{OB}=b\ ; \qquad \overline{OM}=h\ ;$$

nous représenterons par δ la masse de l'unité de surface de la première partie de la membrane; par T la tension uniforme relative à l'unité de longueur, par N la force normale rapportée à l'unité de surface, et qui, appliquée au point m, ferait équilibre aux tensions; par ρ et ρ_1 les rayons de courbure des sections rectangulaires parallèles aux axes des x et des y, faites par le point m. D'après les notions connues sur l'équilibre des surfaces l'on a

$$(282)\ \ldots\ldots \qquad N=T\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right).$$

Dans le cas actuel, comme l'on suppose qu'aucune force accélératrice n'agit sur la membrane, et que z demeure toujours très-petit, pendant toute la durée du mouvement, l'on aura

$$(283) \ldots\ldots N=-\delta\frac{d^2z}{dt^2}\ ;\quad \frac{1}{\rho}=-\frac{d^2z}{dx^2}\ ;\quad \frac{1}{\rho_1}=-\frac{d^2z}{dy^2}\ ,$$

et par suite

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{T}{\delta}\cdot\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

ou bien, en faisant, par abréviation, $\frac{T}{\delta}=c^2$,

$$(284) \ldots\ldots \frac{d^2z}{dt^2}=c^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Pour la deuxième partie de la membrane, l'on aura une équation semblable, dans laquelle nous accentuerons les quantités analogues, ce qui donne

$$(285) \ldots\ldots \frac{d^2z'}{dt^2}=c'^2\left(\frac{d^2z'}{dx^2}+\frac{d^2z'}{dy^2}\right).$$

L'équation (284) a lieu pour toutes les valeurs des coordonnées comprises entre

$$x=0\ ,\quad x=a\ ;\quad y=0\ ,\quad y=h\ .$$

De même, l'équation (285) subsiste entre les limites

$$x=0\ ,\quad x=a\ ;\quad y=h\ ,\quad y=b\ .$$

On satisfait à ces deux équations par des expressions de la forme

$$(286) \ldots\ldots \begin{cases} z=\Sigma.Z\sin.(kt+\varepsilon)\ , \\ z'=\Sigma.Z'\sin.(kt+\varepsilon)\ , \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(287) \ldots\ldots \begin{cases} k^2Z+c^2\left(\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{d^2Z}{dy^2}\right)=0\ , \\ k^2Z'+c'^2\left(\frac{d^2Z'}{dx^2}+\frac{d^2Z'}{dy^2}\right)=0\ . \end{cases}$$

Ces deux dernières équations sont satisfaites par les valeurs suivantes :

$$(288) \ldots\ldots \begin{cases} Z=A\sin.m(x+\mu).\sin.n(y+\nu)\ , \\ Z'=A'\sin.m'(x+\mu').\sin.n'(y+\nu')\ , \end{cases}$$

où A, m, n, μ, ν, A' etc. sont des constantes à déterminer. En substituant ces valeurs dans les équations (287) on aura les relations

$$(289)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} k = c\sqrt{m^2+n^2}\ , \\ k = c'\sqrt{m'^2+n'^2}\ , \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$(290)\ \ldots\ldots\ \ c^2(m^2+n^2) = c'^2(m'^2+n'^2)\ .$$

Pour chaque point de la ligne de séparation des deux parties de la membrane, les deux ordonnées z et z' seront égales, et le plan tangent sera commun aux deux surfaces, ce qui donnera pour $y=h$, les relations suivantes :

$$(291)\ \ldots\ldots\ \ z=z'\ ;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx}\ ;\quad \frac{dz}{dy}=\frac{dz'}{dy}\ .$$

Les équations aux limites, pour la première partie de la membrane, donnent

$$(292)\ \ldots\ldots\ \ z=0 \text{ pour } \begin{cases} x=0\ , \\ x=a\ , \\ y=0\ ; \end{cases}$$

pour la deuxième partie de la membrane on a :

$$(293)\ \ldots\ldots\ \ z'=0 \text{ pour } \begin{cases} x=0\ , \\ x=a\ , \\ y=b\ ; \end{cases}$$

Enfin les conditions initiales du mouvement donneront :

$$(294)\ \ldots \begin{cases} \sin.\varepsilon = \dfrac{\delta\int_0^a dx\int_0^h dy\, Z\gamma + \delta'\int_0^a dx\int_h^b dy\, Z'\gamma'}{\delta\int_0^a dx\int_0^h dy\, Z^2 + \delta'\int_0^a dx\int_h^b dy\, Z'^2}\ , \\ \cos.\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\delta\int_0^a dx\int_0^h dy\, Z\overline{\gamma} + \delta'\int_0^a dx\int_h^b dy\, Z'\overline{\gamma}'}{\delta\int_0^a dx\int_0^h dy\, Z^2 + \delta'\int_0^a dx\int_h^b dy\, Z'^2}\ , \end{cases}$$

où γ, $\bar{\gamma}$, γ', $\bar{\gamma}'$ sont, respectivement, les valeurs initiales de z, $\frac{dz}{dt}$, z', $\frac{dz'}{dt}$.

Les équations (289), (291), (292), (293), (294) serviront à déterminer les constantes, ainsi qu'on va le voir.

Les conditions (292)

$$(295) \ldots\ldots \quad z = 0 \text{ pour } \left\{ \begin{array}{ll} x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{donnent } \mu = 0, \\ x = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m = \frac{i\pi}{a}, \\ y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \nu = 0; \end{array} \right.$$

où i représente un nombre entier quelconque et π le rapport de la circonférence au. diamètre.

Les conditions (293)

$$(296) \ldots\ldots \quad z' = 0 \text{ pour } \left\{ \begin{array}{ll} x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{donnent } \mu' = 0, \\ x = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m' = \frac{i'\pi}{a}, \\ y = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \nu' = -b; \end{array} \right.$$

où i' représente un nombre entier quelconque.

Les équations (291) fournissent les relations suivantes :

$$(297) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} A.\sin.mx.\sin.nh = A'.\sin.m'x.\sin.n'(h-b), \\ mA.\cos.mx.\sin.nh = m'A'.\cos.m'x.\sin.n'(h-b), \\ nA.\sin.mx.\cos.nh = n'A'.\sin.m'x.\cos.n'(h-b). \end{array} \right.$$

En divisant la première de ces équations par la deuxième, on trouve

$$\frac{1}{m}.\text{tang}.mx = \frac{1}{m'}.\text{tang}.m'x,$$

équation à laquelle on satisfait en prenant

$$(298) \ldots\ldots \quad m' = m, \quad \text{ou bien} \quad i' = i.$$

La première des équations (297) devient ainsi

$$(299) \ldots\ldots \quad A.\sin.nh = A'.\sin.n'(h-b),$$

qui servira à établir le rapport qui existe entre A et A'.

En divisant la première équation (297) par la troisième, on obtient:

$$(300) \ldots\ldots \quad \frac{1}{n}.\text{tang.}\,nh = \frac{1}{n'}.\text{tang.}\,n'(h-b) \ ;$$

de l'équation (290) l'on déduit:

$$(301) \ldots\ldots \quad n' = \sqrt{n^2 + m^2\left(\frac{c^2}{c'^2} - 1\right)} = \sqrt{n^2 + \frac{i^2\pi^2}{a^2}\cdot\left(\frac{c^2}{c'^2} - 1\right)} \ .$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente on obtient:

$$(302) \ldots\ldots \quad \frac{1}{n}.\text{tang.}\,nh = \frac{\text{tang.}\,(h-b)\sqrt{n^2 + \frac{i^2\pi^2}{a^2}\cdot\left(\frac{c^2}{c'^2} - 1\right)}}{\sqrt{n^2 + \frac{i^2\pi^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{c'^2} - 1\right)}} \ .$$

Cette équation transcendante servira à déterminer les valeurs de n. On voit que, pour chacune de celles de i, il y en aura une infinité de n; par conséquent les séries (286), qui donnent les expressions de z et z', sont doubles, c'est-à-dire que chacun de leurs termes représente une série formée de la somme des termes relatifs aux diverses valeurs de n correspondantes à une même valeur de i.

Les valeurs de $A.\text{sin.}\,\varepsilon$ et $A.\text{cos.}\,\varepsilon$ se déduiront des équations (294).

Lorsque la membrane est homogène l'on a $c = c'$, $n = n'$, et l'équation (300) donne

$$n = \frac{j\pi}{b} \ ,$$

où j est un nombre entier; l'on aura, par suite,

$$k = c\pi\sqrt{\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}} \ .$$

Nous ne nous arrêterons pas à la discussion de ce cas particulier; nous renvoyons pour cela au Mémoire de Poisson sur *le mouvement des corps élastiques* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Tom. VIII), et à l'ouvrage de M.r Lamé sur *l'élasticité des corps*.

§ X.

Vibrations concentriques d'une sphère homogène élastique.

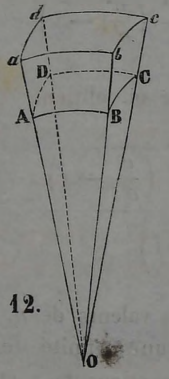


Fig. 12.

46. Soient O (fig. 12) le centre de la sphère, et $OA = r$ le rayon correspondant aux points A, B, C, D; considérons un élément $\overline{ABCDabcd}$ compris entre deux surfaces sphériques de rayons r et $r+dr$, et ayant pour base le quadrilatère rectangulaire $\overline{ABCD}$, dont les côtés infiniment petits sont égaux entr'eux et à $rd\varphi$, $d\varphi$ étant l'angle de deux rayons OA, OB, contigus. Si δ est la densité de la sphère, la masse de l'élément, que nous considérons, sera

$$\delta . r^2 dr d\varphi^2 .$$

Représentons par θ l'allongement du rayon r qui a lieu pendant le mouvement à un instant déterminé par le temps t; soit E le module d'élasticité de la matière composant la sphère. L'allongement proportionnel, correspondant au rayon r, sera $\frac{d\theta}{dr}$, et celui qui correspond au rayon $r+dr$, deviendra $\frac{d\theta}{dr} + d.\frac{d\theta}{dr}$. Ainsi l'élément $r^2 dr d\varphi^2$ sera sollicité, dans le sens du rayon, par une force égale à la différence des deux résistances élastiques déterminées par les allongements précédents, et appliquées respectivement aux deux faces $ABCD = r^2 d\varphi^2$ et $abcd = (r+dr)^2 d\varphi^2$.

Cette force sera donc

$$(303) \quad \ldots\ldots \quad E(r+dr)^2 d\varphi^2 . \left(\frac{d\theta}{dr} + d.\frac{d\theta}{dr} \right) - E r^2 d\varphi^2 \frac{d\theta}{dr}$$

$$= E r d\varphi^2 \left\{ r \frac{d^2\theta}{dr} + 2 dr . \frac{d\theta}{dr} \right\} .$$

On a négligé, dans les produits, les infiniment petits du quatrième ordre, par rapport à ceux du troisième.

Si l'on considère la circonférence d'un grand cercle de la sphère de rayon r, cette circonférence, après que le rayon sera devenu $r+\theta$, subira un allongement égal à $2\pi\theta$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre; ainsi l'allongement proportionnel de la circonférence de ce grand cercle sera $\frac{\theta}{r}$; et si l'on conçoit un élément de section égale à ω, auquel soit appliqué cet allongement, un tel élément subira un effort de tension égal à $\omega E.\frac{\theta}{r}$.

Or si l'on considère les deux faces opposées $\overline{AabB}$ et $\overline{DdcC}$ pour lesquelles on a $\omega = rdrd\varphi$; chacune d'elles sera tendue par une force $Erdrd\varphi.\frac{\theta}{r}$; il en sera de même pour les deux autres faces $\overline{AadD}$ et $\overline{BbcC}$. Cela posé, la résultante des deux tensions, appliquées à deux faces opposées, sera égale à la tension multipliée par $d\varphi$ soit à $Erdrd\varphi^2.\frac{\theta}{r}$.

Ainsi, pour avoir la force motrice qui agit sur l'élément $\delta r^2 drd\varphi^2$, il faudra ôter de la force (303) le double de la résultante précédente soit $2Erdrd\varphi^2.\frac{\theta}{r}$; de sorte que si aucune force extérieure n'agit sur la sphère, l'équation du mouvement de cet élément, dans le sens du rayon, sera

$$\delta.r^2 dr d\varphi^2.\frac{d^2\theta}{dt^2} = Erd\varphi^2.\left\{r\frac{d^2\theta}{dr} + 2dr\frac{d\theta}{dr} - 2dr\frac{\theta}{r}\right\},$$

ou bien, en ôtant les facteurs communs, en divisant par $r^2 dr$ et par δ, et faisant par abréviation $\frac{E}{\delta} = a^2$,

$$(304) \ldots\ldots \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\left\{\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}.\frac{d\theta}{dr} - \frac{2\theta}{r^2}\right\}.$$

On aura, d'après les principes déjà exposés,

$$(305) \ldots\ldots \quad \theta = \Sigma.\mathfrak{R}\sin.\left\{kt+\varepsilon\right\},$$

où $\mathfrak{R}$ exprime une fonction de r.

En substituant dans l'équation (304), il vient

$$(306) \ldots\ldots \quad \frac{d^2\mathfrak{R}}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d\mathfrak{R}}{dr} - \frac{2\mathfrak{R}}{r^2} + \frac{k^2}{a^2}\mathfrak{R} = 0 .$$

Observons que

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d\mathfrak{R}}{dr} - \frac{\mathfrak{R}}{r^2} = \frac{d.\frac{1}{r}\mathfrak{R}}{dr} ;$$

cela étant, multiplions l'équation (306) par dr, intégrons et multiplions par r, il viendra

$$(307) \ldots\ldots \quad r\frac{d\mathfrak{R}}{dr} + 2\mathfrak{R} + \frac{k^2}{a^2} r\int \mathfrak{R}\, dr = 0 .$$

Si l'on fait

$$(308) \ldots\ldots \quad r\int \mathfrak{R}\, dr = U ,$$

l'équation (307) devient

$$(309) \ldots\ldots \quad \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{k^2}{a^2} U = 0 ;$$

d'où l'on déduit

$$(310) \ldots\ldots \quad U = r\int \mathfrak{R}\, dr = A.\sin.\left\{ m + \frac{k}{a} r \right\} ,$$

et par suite

$$(311) \ldots \quad \mathfrak{R} = \frac{A}{r^2}\left(r\frac{k}{a}\cos.\left(m + \frac{k}{a} r\right) - \sin.\left(m + \frac{k}{a} r\right)\right) ;$$

où A et m sont deux constantes arbitraires.

Si l'on suppose la sphère pleine, on devra avoir, pendant toute la durée du mouvement, $\theta = 0$ pour $r = 0$; ou, en d'autres termes, $\mathfrak{R} = 0$ pour $r = 0$. L'on satisfait à cette condition en faisant $m = 0$; ce qui réduit l'équation (311) à la suivante :

$$(312) \ldots\ldots \quad \mathfrak{R} = \frac{A}{r^2}\left\{ r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a} r - \sin.\frac{k}{a} r \right\} .$$

Ainsi l'expression de θ sera

$$(313)\ \ldots\quad \theta = \Sigma . \frac{A}{r^2}\left\{ r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a}r - \sin.\frac{k}{a}r \right\} \sin.(kt+\varepsilon)\ .$$

Soient α et $\bar{\alpha}$ les valeurs initiales de θ et $\frac{d\theta}{dt}$ correspondantes à un rayon r; la masse de la couche sphérique élémentaire étant $4\pi r^2 dr.\delta$, si l'on fait, par abréviation,

$$(314)\ \ldots\ldots\quad V = \frac{1}{r^2}\left\{ r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a}r - \sin.\frac{k}{a}r \right\},$$

l'on aura, en vertu du principe général exprimé par les équations (37),

$$(315)\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} A\sin.\varepsilon = \dfrac{\int_0^{r'} \alpha r^2 V dr}{\int_0^{r} r^2 V^2 dr}, \\ A\cos.\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\int_0^{r'} \bar{\alpha} r^2 V dr}{\int_0^{r'} r^2 V^2 dr}, \end{cases}$$

où r' exprime le rayon correspondant à la surface extérieure de la sphère.

L'on observera que

$$\int_0^{r'} r^2 V^2 dr = \int_0^{r'} \frac{1}{r^2}\cdot\left\{ r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a}r - \sin.\frac{k}{a}r \right\}^2 dr$$

$$= \int_0^{r'} \left\{ r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a}r - \sin.\frac{k}{a}r \right\} d.\frac{\sin.\frac{k}{a}r}{r}$$

$$= \frac{1}{2r'}\left\{ r'^2\frac{k^2}{a^2} + r'\frac{k}{a}\sin.\frac{k}{a}r'\cos.\frac{k}{a}r' - 2\sin.^2\frac{k}{a}r' \right\};$$

d'où l'on conclut

$$(316)\quad \begin{cases} A\sin.\varepsilon = \dfrac{2r'\displaystyle\int_0^{r'}\alpha\left\{r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a}r-\sin.\frac{k}{a}r\right\}dr}{r'^2\frac{k^2}{a^2}+r'\frac{k}{a}\sin.\frac{k}{a}r'\cos.\frac{k}{a}r'-2\sin.^2\frac{k}{a}r'}, \\ A\cos.\varepsilon = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{2r'\displaystyle\int_0^{r'}\frac{}{\alpha}\left\{r\frac{k}{a}\cos.\frac{k}{a}r-\sin.\frac{k}{\alpha}r\right\}dr}{r'^2\frac{k^2}{a^2}+r'\frac{k}{a}\sin.\frac{k}{a}r'\cos.\frac{k}{a}r'-2\sin.^2\frac{k}{a}r'}. \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que ces résultats coïncident avec ceux obtenus par Poisson dans son Mémoire déjà cité, sur le *Mouvement des corps élastiques*.

47. Il reste encore à déterminer les différentes valeurs de k; pour cela nous devrons avoir recours aux considérations relatives à l'action moléculaire dans la couche sphérique extérieure, afin d'avoir l'équation aux limites de laquelle on déduira les valeurs de k. Nous partirons des principes fondamentaux posés par Poisson en les adaptant au cas spécial dont il s'agit.

On peut, en général, considérer un corps solide comme composé de molécules, ou pour mieux dire de groupes moléculaires tenus à distance les uns des autres en vertu de forces d'attraction et de répulsion mutuelles. Dans l'état ordinaire, et lorsqu'aucune force extrinsèque n'agit sur le solide, ces forces se font équilibre. Lorsque, au contraire, une cause quelconque vient rapprocher ou éloigner ces groupes moléculaires, il se développe respectivement des forces de répulsion ou d'attraction qui déterminent le mouvement de vibration.

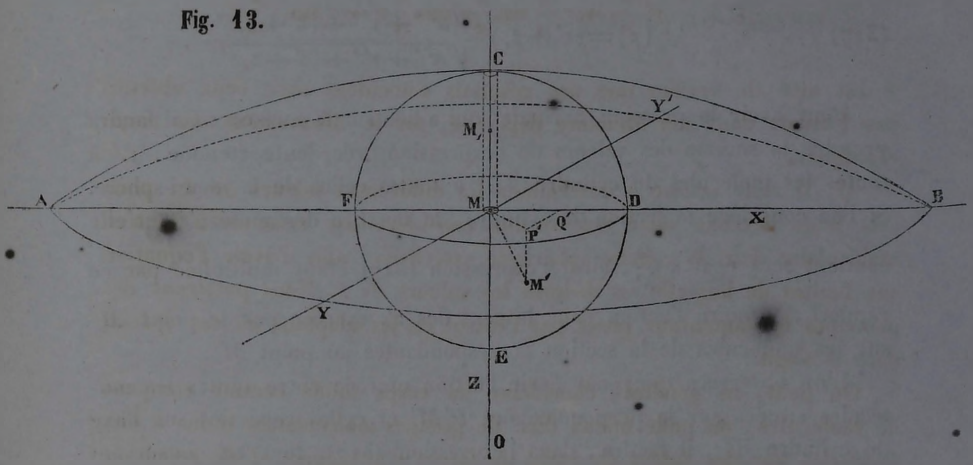
On admet généralement, que l'action moléculaire décroit très-rapidement à mesure que la distance des molécules augmente. Ainsi, pour une distance sensible, la force attractive est comme nulle. Quelleque soit, pourtant, la petitesse du rayon d'activité de l'action moléculaire, on ne peut guère concevoir les phénomènes qui s'y rapportent sans admettre que ce rayon soit lui-même extrêmement grand relativement à la distance de chaque groupe de molécule du groupe voisin. De sorte que si ρ, est la longueur du rayon d'activité, λ la distance moyenne des molécules,

le rapport $\frac{\rho_1}{\lambda}$ exprimera un nombre fort grand. L'action mutuelle de deux molécules sera exprimée par une fonction $F(\rho)$ de leur distance ρ; or, comme $F(\rho)$ devient insensible lorsque $\rho = \rho_1$, il est clair que l'on aura

$$F(\rho_1) = F(\infty) .$$

Dans le cas que nous examinons, le corps étant supposé homogène, la valeur de $F(\rho)$ ne variera pas avec la direction du rayon ρ.

Fig. 13.



Soient (fig. 13) : ACB une calotte sphérique déterminée par un plan $AYBY'$ conduit à une distance ρ_1 du sommet C; $\overline{CO}$ le rayon correspondant à C; AB l'intersection d'un plan méridien avec le plan $AYBY'$; M la trace du rayon $\overline{CO}$ sur ce dernier plan.

De ce point, avec un rayon égal à ρ_1, décrivons une sphère $\overline{FEDC}$; considérons un cylindre droit ayant pour hauteur la ligne MC et pour base une aire ω, que l'on peut supposer contenir un très-grand nombre de molécules, quoique ses dimensions linéaires soient très petites par rapport à ρ_1. L'action des molécules contenues dans la demi-sphère inférieure FED, sur les molécules du cylindre $\overline{MC}$, déterminera la pression exercée par ce cylindre sur sa base ω.

Soient deux molécules, l'une M' appartenant à la demi-sphère, et

l'autre M_1 faisant partie du cylindre. Désignons par x', y', z' les coordonnées du point M' pris par rapport à trois axes orthogonaux ayant l'origine en M, et situés, ceux des x', y', dans le plan $AYBY'$, et le troisième des z', suivant le rayon MO de la sphère; soit z_1 la hauteur du point M_1 au-dessus de M. La distance des deux molécules M_1M' sera

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' + z_1)^2} ,$$

et la composante, suivant l'axe des z', de leur action mutuelle sera exprimée par

$$(317) \quad \ldots \quad \frac{z' + z_1}{\rho} F(\rho) = (z' + z_1) \frac{F(x'^2 + y'^2 + (z' + z_1)^2)}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' + z_1)^2}} .$$

Pour avoir la pression normale, qui a lieu sur la surface ω, il faudra prendre la somme des valeurs de l'expression précédente étendue : 1.° à toutes les molécules du cylindre : 2.° à toutes celles de la demi-sphère. Si l'on considère la section du cylindre, le nombre des molécules qu'elle contient sera égal à $\frac{\omega}{\lambda^2}$; ainsi l'expression (317) étant multipliée par ce rapport, on aura l'action dans le sens des z', exercée par le point M' sur les molécules de la section correspondantes au point M_1.

L'on observera que, pour avoir l'action exercée entre toutes les molécules situées sur la perpendiculaire $P'M'$ et celles reparties sur l'axe du cylindre $\overline{MC}$, il faudra, dans l'expression (317), tout en conservant à x' et y' les mêmes valeurs, faire successivement, z', puis z_1, égaux respectivement à λ, 2λ, 3λ, ... $n\lambda$, etc. De sorte que, comme on peut écrire $\frac{F(\rho)}{\rho}$ sous la forme $f(z' + z_1)$, on devra prendre, pour expression de l'action susdite, la somme des séries :

$$(318) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\lambda) + f(2\lambda) + f(3\lambda) \ldots + f(n\lambda) + \ldots \\ \quad + f(2\lambda) + f(3\lambda) \ldots + f(n\lambda) + \ldots \\ \quad\quad + f(3\lambda) \ldots + f(n\lambda) + \ldots \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ f(\lambda) + 2f(2\lambda) + 3f(3\lambda) \ldots + nf(n\lambda) + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Or, si l'on fait $z'+z_1=\zeta$, n étant le nombre des molécules distribuées sur la longueur ζ, il est clair, que l'on aura $\frac{\zeta}{\lambda}=n$, et, par conséquent, le deuxième membre de l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme

$$\Sigma.\frac{\zeta}{\lambda}f(\zeta),$$

cette somme étant étendue depuis $\zeta=0$ jusqu'à $\zeta=\infty$, et les distances ζ étant évaluées à partir du point M origine des coordonnées. De là, on conclut que la somme des composantes (317), étendue à toutes les molécules contenues dans le cylindre $\overline{MC}$, sera, pour les mêmes valeurs, de x' et y',

$$(319)\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma.\frac{\omega}{\lambda^2}.\frac{\zeta^2}{\lambda}.\frac{F(\rho)}{\rho},$$

où l'on fera

$$\rho=\sqrt{x'^2+y'^2+\zeta^2}.$$

Cette somme étant ensuite étendue à toutes les molécules de la demi-sphère, et la pression normale qui a lieu au point M sur l'élément ω étant représentée par $R\omega$, on aura

$$(320)\ldots\ldots\ldots \quad R\omega=\omega\Sigma.\Sigma.\frac{\zeta^2}{\lambda^3}.\frac{F(\rho)}{\rho};$$

et pour la pression rapportée à l'unité de surface

$$(321)\ldots\ldots\ldots \quad R=\Sigma.\Sigma.\frac{\zeta^2}{\lambda^3}.\frac{F(\rho)}{\rho}.$$

Lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur la sphère, cette expression est nulle; ainsi, dans le cas que nous examinons, nous aurons

$$(322)\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma.\Sigma.\frac{\zeta^2}{\lambda^3}.\frac{F(\rho)}{\rho}=0.$$

Si l'on désigne par γ l'angle que fait, avec l'axe des z', la ligne $\overline{M'M_1}=\rho$, on aura

$$\zeta = \rho \cos. \gamma ,$$

et par suite l'équation (322) devient

$$(323) \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma.\Sigma. \frac{\cos.^2 \gamma}{\lambda^3} \rho F(\rho) = 0 .$$

Supposons actuellement que le point M_1 soit transporté sur l'axe des z' d'une quantité égale à w, il en résultera dans les coordonnées x', y', ζ du point M' des variations que nous indiquerons par u', v', w', et la distance $\overline{M_1 M'}$ deviendra :

$$\rho' = \rho + \Delta\rho = \rho + \frac{1}{\rho} \left\{ x'u' + y'v' + \zeta(w' - w) \right\} .$$

En observant que l'angle γ ne variera pas sensiblement, l'expression (323) de la pression normale correspondante au point M sera

$$(324) \ldots \quad \Sigma.\Sigma. \frac{\cos.^2 \gamma}{\lambda^3} \left\{ \rho F\rho + \frac{1}{\rho} \left\{ x'u' + y'v' + \zeta(w' - w) \right\} \frac{d.\rho F\rho}{d\rho} \right\} .$$

Cette pression doit être encore nulle, puisque aucune force extérieure n'agit sur la sphère ; ainsi, en tenant compte de l'équation (323), la dernière donnera

$$(325) \ldots \quad \Sigma.\Sigma. \frac{\cos.^2 \gamma}{\lambda^3} \left\{ x'u' + y'v' + \zeta(w' - w) \right\} \frac{1}{\rho} \frac{d.\rho F(\rho)}{d\rho} = 0 .$$

Désignons par θ' l'allongement du rayon r' de la sphère (OM), qui a lieu pendant le mouvement ; pour un rayon qui diffère en moins du premier d'une quantité dr', l'on aura un allongement égal à $\theta' - d\theta'$; et si la différence des rayons était ζ, comme celle qui existe entre les rayons correspondants aux points M et M', on déterminerait la différence $w' - w$ des allongements correspondants par la proportion

$$(326) \ldots\ldots \quad dr' : d\theta' :: \zeta : w' - w = \zeta . \frac{d\theta'}{dr'} .$$

De même, si l'on considère la circonférence de grand cercle passant par le point M, cette circonférence, qui était primitivement égale à $2\pi r'$

deviendra $2\pi r' + 2\pi\theta'$; en comparant la distance circulaire du point M à son antipode, on voit que cette distance s'est allongée d'une quantité $\pi\theta'$; de sorte que, si l'on veut obtenir l'augmentation dans le sens des x' de la distance u' du point M' par rapport à M, on pourra établir la proportion :

$$(327) \ldots\ldots\ldots \quad \pi r' : \pi\theta' :: x' : u' = x' . \frac{\theta'}{r'} \ ;$$

et parceque la dilatation tangentielle est supposée uniforme pour une même couche sphérique, on aura pareillement :

$$(328) \ldots\ldots\ldots \quad v' = y' . \frac{\theta'}{r'} \ ;$$

d'où, en substituant dans l'équation (325), il viendra

$$(329) \ldots\ldots \quad \Sigma . \Sigma . \frac{\cos.^2\gamma}{\lambda^3} \left\{ \frac{\theta'}{r'} (x'^2 + y'^2) + \zeta^2 . \frac{d\theta'}{dr'} \right\} \frac{d . \rho F(\rho)}{d\rho} = 0 \ .$$

L'on observera que

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2 \sin.^2\gamma \ ;$$

ainsi l'équation précédente devient

$$(330) \ldots \quad \Sigma . \Sigma . \cos.^2\gamma \left\{ \frac{\theta'}{r'} \sin.^2\gamma + \frac{d\theta'}{dr'} \cos.^2\gamma \right\} \frac{\rho^2}{\lambda^3} . \frac{d . \rho F(\rho)}{d\rho} = 0 \ .$$

Afin de pouvoir effectuer les sommes indiquées, remarquons que l'un des signes Σ. s'étend à toutes les valeurs de ρ, tandisque l'autre signe Σ. s'étend à la surface de l'hémisphère, correspondant à chaque valeur de ρ.

Si donc l'on représente par $\mu^2\rho^2$ l'élément de surface de l'hémisphère, le nombre des molécules, qu'il comprend, sera $\frac{\mu^2\rho^2}{\lambda^2}$; l'expression (330) prendra ainsi la forme :

$$(331) \ldots \quad \mathcal{S} . \mu^2 \cos.^2\gamma \left\{ \frac{\theta'}{r'} \sin.^2\gamma + \frac{d\theta'}{dr'} \cos.^2\gamma \right\} . \Sigma . \frac{\rho^4}{\lambda^5} . \frac{d . \rho F(\rho)}{d\rho} = 0 \ ;$$

où $\mathcal{S}$. indique la somme faite par rapport à μ et γ.

Par suite de la transformation qu'à subie l'expression précédente, il

est clair que son premier facteur étant indépendant de toute hypothèse sur la distance des groupes moléculaires, l'on pourra prendre

$$\mu^2 = \sin.\gamma\, d\gamma\, .\, d\psi\ ,$$

où $d\psi$ indique l'angle de deux plans méridiens consécutifs conduits par l'axe des z'.

Ainsi, le signe $\mathcal{S}$ se changera en intégrale double que l'on prendra depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \frac{1}{2}\pi$; et depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$.

Nous aurons donc, au lieu de l'équation (331),

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos.^2\gamma\, .\, d\, .\, \cos.\gamma \left\{ \frac{\theta'}{r'} \sin.^2\gamma + \frac{d\theta'}{dr'} \cos.^2\gamma \right\} .\, \Sigma\, .\, \frac{\rho^4}{\lambda^5} .\, \frac{d\, .\, \rho F(\rho)}{d\rho} = 0\ ;$$

ou bien, en effectuant les intégrations,

$$(332)\ \ldots\ldots \quad \left\{ \frac{2\theta'}{r'} + 3\frac{d\theta'}{dr'} \right\} .\, \frac{2\pi}{15} .\, \Sigma\, .\, \frac{\rho^4}{\lambda^5} .\, \frac{d\, .\, \rho F(\rho)}{d\rho} = 0\ ;$$

d'où l'on déduit

$$(333)\ \ldots\ldots \quad \frac{2\theta'}{r'} + 3\frac{d\theta'}{dr'} = 0\ ;$$

c'est l'équation relative à la surface; elle coïncide avec celle donnée par Poisson.

En y substituant la valeur de θ', déduite de l'équation (313), on aura

$$(334)\ \ldots\ldots \quad \left(4 - 3\frac{k^2}{a^2} r'^2 \right) \sin.\frac{k}{a} r' - 4\frac{k}{a} r' .\, \cos.\frac{k}{a} r' = 0\ ,$$

équation, qui servira à déterminer les valeurs de k, et complète ainsi la solution du problème que nous nous étions proposé de résoudre.

NOTE

sur la théorie de la lumière.

48. La question traitée au § II a beaucoup d'analogies avec la théorie par laquelle on explique les phénomènes de la lumière dans le système des ondulations. Cette théorie, telle qu'elle a été exposée par FRESNEL, repose sur les principes suivants, savoir:

1.° Chaque milieu élastique a trois axes rectangulaires tels que, si une molécule est déplacée dans une de leurs directions, la résultante des forces moléculaires, qui agissent sur elle, se trouvera dans la direction du déplacement.

2.° A l'exception des cas précédents, la molécule déplacée est poussée, par les forces élastiques du milieu, dans une direction oblique par rapport à celle du déplacement.

3.° Dans chaque plan il y a deux directions de déplacement rectangulaires entr'elles, pour lesquelles la résultante des forces moléculaires sera contenue dans le plan perpendiculaire au précédent, et qui passe par la droite du déplacement.

On suppose, que dans le milieu élastique dont il s'agit, l'élasticité varie avec la direction, mais que la constitution de ce milieu est partout la même.

Le mouvement vibratoire d'un point attiré par plusieurs centres fixes, jouit de propriétés analogues à celles qui viennent d'être énoncées. Pour nous en convaincre, considérons les expressions des coordonnées variables de ce point, et souvenons nous qu'il y a trois *directions principales* orthogonales, selon chacune desquelles le mouvement est isochrone. Si l'on prend pour axe des coordonnées x', y', z', ces trois axes, les équations du mouvement, seront évidemment de la forme

$$(335)\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases} m.\dfrac{d^2x'}{dt^2}+A'x'=0\ , \\ m.\dfrac{d^2y'}{dt^2}+B'y'=0\ , \\ m.\dfrac{d^2z'}{dt^2}+C'z'=0\ ; \end{cases}$$

où A', B', C' sont trois coefficients nécessairement positifs, puisque le mouvement est vibratoire, et dont les valeurs se déduisent de l'expression

$$A+pM+qN \quad (\text{N.° 7.}),$$

en y mettant successivement pour p et q leurs trois valeurs respectives p', q' ; p'', q'' ; p''', q'''.

Si l'on désigne par μ, ν, ϖ, les angles que fait, avec les axes (x', y', z'), la direction de la résultante des forces d'attraction, ou, en d'autres termes, la force motrice effective $m\frac{d^2s}{dt^2}$, les équations (335) donneront, en faisant, par abréviation,

$$R'=\sqrt{A'^2x'^2+B'^2y'^2+C'^2z'^2},$$

$$(336)\ldots \quad \cos.\mu=-\frac{A'x'}{R'}\ ; \quad \cos.\nu=-\frac{B'y'}{R'}\ ; \quad \cos.\varpi=-\frac{C'z'}{R'}\ .$$

Si l'on compare ces expressions à celles des cosinus des angles de la direction du déplacement s, qui sont $\frac{x'}{s}$, $\frac{y'}{s}$, $\frac{z'}{s}$, où l'on a fait, par abréviation, $s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, on en conclura que, en général, les deux directions du déplacement et de la résultante des forces élastiques ne coïncident pas, sauf quand le déplacement a lieu dans le sens d'un des trois axes.

Considérons un ellipsoïde dont l'équation soit

$$(337)\ldots\ldots \quad D+A'x'^2+B'y'^2+C'z'^2=0\ ;$$

les cosinus des angles que fait, avec les axes, la normale à un point (x', y', z') de la surface, sont

$$\frac{A'x'}{R'}\ , \qquad \frac{B'y'}{R'}\ , \qquad \frac{C'z'}{R'}\ ;$$

expressions identiques [signe à part], avec celles des équations (336).

Si donc l'on construit l'ellipsoïde représenté par l'équation (337), la réaction élastique qui se manifeste, lorsque le déplacement a lieu suivant

un rayon vecteur quelconque, est dirigée dans le sens de la normale correspondante, et son intensité est représentée par

$$\sqrt{A'^2x'^2+B'^2y'^2+C'^2z'^2}\ ,$$

ou bien par

$$s.\sqrt{A'^2\cos.^2\alpha+B'^2\cos.^2\beta+C'^2\cos.^2\gamma}\ ;$$

s étant l'étendue du déplacement, et α, β, γ les angles que le rayon vecteur fait avec les axes.

L'analyse du § II, ainsi que la précédente, démontrent que si le déplacement a lieu suivant un des axes, les vibrations continueront indéfiniment dans ce sens.

49. Considérons un déplacement qui aurait lieu dans le plan d'une section quelconque de l'ellipsoïde, et, pour cela, reprenons les équations (44) :

$$(44)\ \ldots\ \begin{cases} m.\dfrac{d^2x}{dt^2}+Ax+My+Nz=0\ , \\ m.\dfrac{d^2y}{dt^2}+By+Mx+Pz=0\ , \\ m.\dfrac{d^2z}{dt^2}+Cz+Nx+Zy=0\ . \end{cases}$$

Le plan de la section considérée sera celui-même des (x, y) pour lequel on a $z=0$; si l'on veut que la réaction élastique se fasse dans le plan normal à celui des (x, y) qui passe par la direction du déplacement, en désignant par $m.\dfrac{d^2s}{dt^2}$ cette force élastique, l'on devra avoir

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}=m.\sin.\varpi\,\frac{d^2s}{dt^2}.\frac{x}{s}\ ,\qquad m.\frac{d^2y}{dt^2}=m.\sin.\varpi\,\frac{d^2s}{dt^2}.\frac{y}{s}\ ,$$

et par conséquent

$$(338)\ \ldots\ldots\qquad m.\frac{d^2x}{dt^2}y-m.\frac{d^2y}{dt^2}x=0\ ;$$

ainsi, des deux premières équations (44) on déduira, en y faisant $z=0$,

$$(339)\ \ldots\ldots\qquad M(x^2-y^2)+xy(B-A)=0\ .$$

Si l'on désigne par ω l'angle que fait avec l'axe des x la direction du

déplacement qui satisfait à l'équation précédente, on aura

$$x = s.\cos.\omega \; ; \qquad y = s.\cos.\omega \; ;$$

d'où, en substituant, il viendra

$$(340) \ldots\ldots (\cos.^2\omega - \sin.^2\omega) M + \sin.\omega\cos.\omega (B - A) = 0 \; .$$

Cela posé, considérons l'ellipsoïde dont l'équation générale, rapportée aux axes (x, y, z), est

$$(341) \ldots A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2 M x y + 2 N x z + 2 P y z + F = 0 \; .$$

L'équation de la section elliptique, correspondante au plan (x, y), sera

$$(342) \ldots\ldots A x^2 + B y^2 + 2 M x y + F = 0 \; .$$

Rapportons cette ellipse à ses axes, et désignons par x'', y'', les nouvelles coordonnées, par σ l'angle que le nouvel axe des abscisses x'' fait avec celui des x, nous aurons

$$x = x'' \cos.\sigma - y'' \sin.\sigma \; ,$$

$$y = x'' \sin.\sigma + y'' \cos.\sigma \; ;$$

substituant dans l'équation (342), et égalant à zéro le coefficient du terme en x'', y'', on aura

$$(\cos.^2\sigma - \sin.^2\sigma) M + \sin.\sigma.\cos.\sigma.(B - A) = 0 \; ;$$

on voit que cette équation est identique avec l'équation (340) ; d'où l'on conclut qu'il y a, dans un même plan, deux directions de déplacement, pour lesquelles la force élastique développée se trouve dans le plan normal au précédent qui passe par la ligne du déplacement; que ces deux directions sont à angle droit et qu'elles se confondent avec les deux axes de l'ellipse résultant de l'intersection de l'ellipsoïde avec le plan dont il s'agit.

L'on arrive encore à ce résultat, par les considérations géométriques suivantes.

Nous avons vu que le déplacement ayant lieu suivant un rayon vecteur, la réaction élastique était dirigée dans le sens de la normale à l'ellipsoïde correspondante. Par ces deux lignes conduisons un plan que nous désignerons par (RN); soit le plan (TN) tangent à l'ellipsoïde, et par conséquent perpendiculaire à la normale et au plan précédent; conduisons enfin, par le rayon vecteur, le plan (PR) perpendiculaire au plan (RN).. La droite intersection des deux plans (TN) et (PR), sera : perpendiculaire à (RN), perpendiculaire au rayon vecteur, et tangente à l'ellipse intersection du plan (PR) avec l'ellipsoïde. Or, dans une ellipse, les seuls rayons vecteurs, partant du centre, perpendiculaires à la tangente correspondante, sont les axes principaux; ainsi se trouve confirmée la proposition que nous avions énoncée.

L'examen des valeurs variables de (x, y, z) [équations (65)] démontre que, dans le cas dont il s'agit, le mouvement n'est pas isochrone, et qu'il change continuellement de direction, ce qui d'ailleurs résulte de l'analyse précédente elle-même, puisque, sauf dans le cas où le déplacement a lieu suivant un des axes de l'ellipsoïde, dans tous les autres la direction de la réaction élastique développée est oblique à celle du déplacement.

Nous ne dirons rien des applications que l'on peut faire des résultats précédents à la théorie des vibrations lumineuses; pour cela nous renvoyons aux ouvrages spéciaux, particulièrement au beau Traité de M.r Mossotti intitulé : *Lezioni elementari di fisica-matematica.*

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION ..... Page 3

§ I. — Principes généraux ..... » 6

§ II. — Mouvements vibratoires d'un point matériel attiré par plusieurs centres fixes ..... » 24

§ III. — Mouvements vibratoires d'un fil flexible, fixé par une de ses extrémités, et chargé de deux masses pesantes, placées l'une à l'extrémité du fil, et l'autre en un point intermédiaire de sa longueur ..... » 30

§ IV. — Mouvements vibratoires d'un fil rectiligne flexible et inextensible qui porte diverses masses réparties sur les différents points de sa longueur ..... » 36

PREMIER PROBLÈME. — Déterminer les lois du mouvement lorsque les masses $m_1 \ldots\ldots$, $m_n \ldots\ldots$, m_r sont pesantes. La droite AB (fig. 3) est supposée verticale, et le fil fixé par son extrémité supérieure A ..... » 45

DEUXIÈME PROBLÈME. — Déterminer les oscillations d'un fil pesant fixé par son extrémité supérieure, et portant à l'autre extrémité un poids gm_r ..... » 46

TROISIÈME PROBLÈME. — Déterminer les oscillations d'un fil pesant, composé de deux parties hétérogènes, fixé par une de ses extrémités, et portant à l'autre extrémité, ainsi qu'au point de jonction de ses deux parties, deux masses m_2, m_1 » 56

QUATRIÈME PROBLÈME. — Déterminer les vibrations transversales du fil $\overline{AMB}$ (fig. 6) composé de deux parties hétérogènes $\overline{AM}$ et $\overline{MB}$, fixé par ses deux extrémités, portant, au point de jonction de ses deux parties, une masse m_1, et soumis à une tension constante T ..... » 62

§ V. — Vibrations longitudinales d'une verge élastique rectiligne chargée de différentes masses réparties sur divers points de sa longueur ..... Page 71

§ VI. — Mouvements oscillatoires d'un fil flexible et inextensible fixé par ses deux extrémités, et formant une courbe sous l'action de forces distribuées sur les divers points de sa longueur . » 83

§ VII. — Vibrations d'un polygone funiculaire formé d'éléments flexibles et extensibles ..... » 90

§ VIII. — Vibrations transversales d'une verge élastique composée de diverses parties hétérogènes ..... » 95

§ IX. — Vibrations d'une membrane flexible, plane, rectangulaire et composée de deux parties de nature différente ..... » 105

§ X. — Vibrations concentriques d'une sphère homogène élastique ... » 110

Note sur la théorie de la lumière ..... » 121

IRR 946